



第三章

函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念



基础上分

1. **D** 【解析】对于 A, 集合 M 中的元素 2 对应集合 N 中的元素 1 和 3, 不符合函数定义, 不是函数, **故错误**;

对于 B, 集合 M 中的元素 3 在集合 N 中没有元素与其对应, 不是函数, **故错误**;

对于 C, 箭头应从集合 M 中的元素指向集合 N 中的元素, **故错误**;

对于 D, 符合函数定义, 所以是函数, **故正确**.

2. **ABD** 【解析】对于选项 C, 当 $x > 0$ 时, 有 2 个函数值与 x 对应, 不符合函数定义, 其余选项均符合函数定义, **故选 ABD**.

易错警示 忽略函数定义中函数值 y 的唯一性而致错

函数中一个自变量只能对应一个函数值, 不能出现一对多的情况, 但值域中的一个元素可以与定义域中的多个或无数个元素对应.

3. **D** 【解析】对于 A, 当 $y = 1$ 时, $x^2 + 1 = 0$, 无实数解, 即在 $(-\infty, 0)$ 内不存在唯一确定的实数 x 与 $y = 1$ 对应, 不符合函数定义, **故 A 不正确**;

对于 B, 当 $y = -1$ 时, $x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = \pm 1$, 不满足唯一确定的实数 x 与 $y = -1$ 对应, 不符合函数定义, **故 B 不正确**;

对于 C, 当 $x = 0$ 时, 由 $x^2 + y = 0$, 得 $y = 0 \notin (-\infty, 0)$, 即在 $(-\infty, 0)$ 内不存在唯一确定的实数 y 与 $x = 0$ 对应, 不符合函数定义, **故 C 错误**;

对于 D, 由 $x^2 + y = 0$, 得 $y = -x^2$, 对 $\forall x \in (-\infty, 0)$, 都有唯一确定的 y 与之对应, 符合函数定义, **故 D 正确**.

故选 D.

4. **C** 【解析】由题意可知炮弹发射后共飞行了 20 s, 所以 $0 \leq t \leq 20$, 即函数 $h = 100t - 5t^2$ 的定义域为 $[0, 20]$. **故选 C**.

5. **D** 【解析】由题可知 $\begin{cases} 2x-1 \neq 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得 $x < 2$

且 $x \neq \frac{1}{2}$, 所以函数 $f(x) = \frac{(2x-1)^0}{\sqrt{2-x}}$ 的定



义域为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$. 故选 D.

- 6. C** 【解析】函数 $g(x)$ 的定义域需满足
- $$\begin{cases} -2 < x+1 < 2, \\ 2x \neq 0, \end{cases}$$
- 解得 $-3 < x < 1$ 且 $x \neq 0$, 所以函数 $g(x)$ 的定义域是 $(-3, 0) \cup (0, 1)$. 故选 C.

- 7. B** 【解析】若函数 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ 有意义, 则 $1-x^2 > 0$, 解得 $-1 < x < 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} -1 < 2x < 1, \\ -1 < 1-x < 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0 < x < 2, \end{cases} \text{ 即 } 0 <$$

$$x < \frac{1}{2},$$

所以函数 $g(x) = f(2x) + f(1-x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

故选 B.

- 8. A** 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 - ax + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $ax^2 - ax + 1 \neq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

①当 $a = 0$ 时, $1 \neq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;

②当 $a \neq 0$ 时, 只需 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$.

综上, $0 \leq a < 4$.

记集合 $A = (0, 4)$, $B = [0, 4)$.

因为 A 是 B 的真子集, 所以“函数 $f(x) = \frac{1}{ax^2 - ax + 1}$ 的定义域为 \mathbf{R} ”是“ $0 < a < 4$ ”的必要不充分条件. 故选 A.

易错警示 忽略对参数的分类讨论而致错

求定义域, 特别是二次项系数含参数时, 要注意二次项系数为零的情形, 避免遗漏特殊情形下的值或范围.

- 9. $\{x | 12 \leq x \leq 28\}$** 【解析】已知矩形的一条边为 x m, 设与其相邻的边为 y m, 由三角形相似得 $\frac{x}{40} = \frac{40-y}{40}$ ($0 < x < 40, 0 < y < 40$), 所以 $x+y=40$, 矩形草坪的面积 $S = xy = x(40-x) \geq 336$, 解得 $12 \leq x \leq 28$. 故 x 的取值范围为 $\{x | 12 \leq x \leq 28\}$.

- 10. ABC** 【解析】函数 $f(x-2)$ 中的 x 需满足 $-3 \leq x-2 \leq 3$, 解得 $-1 \leq x \leq 5$, 即函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[-1, 5]$, 故 A 正确;
- 函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 中的 x 需满足 $\begin{cases} -3 \leq 3x \leq 3, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq x < 1$, 即函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1, 1)$, 故 B 正确;



函数 $f(x-2)$ 和 $f(2x)$ 的值域都为 $[-3, 3]$, 故 C 正确, D 错误.

11. D



思路导引

函数 $f(x)$ 的解析式为分式且分子分母的次数相同, 求其值域时可利用“分离常数法”求解.

【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为

$$\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{3}\right\}, f(x) = \frac{2x-3}{3x+1} = \frac{\frac{2}{3}(3x+1) - \frac{11}{3}}{3x+1} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{11}{3}}{3x+1} \neq \frac{2}{3},$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 故选 D.

故选 BCD.

方法总结

分离常数法+图象法

形如 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ac \neq 0$) 的函数, 求其值域的步骤如下:

第一步: 分离常数, 将分子变为常数

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d},$$

分离出常数 $\frac{a}{c}$ 和分子为常数的分式 $\frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}$;

第二步: 结合反比例函数 $y = \frac{1}{x}$

或 $y = -\frac{1}{x}$ 的性质求函数 $f(x)$ 的值域.

12. BCD 【解析】对于 A 选项, $y = f(x) = -x+1$, 可知在定义域内, y 随着 x 的增大而减小, 故其值域为 $[0, 4]$, 不符合题意; 对于 B 选项, 令 $t = \sqrt{x+2}$, $t \in [0, +\infty)$, 易知函数 $y = t$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 符合题意;

对于 C 选项, 函数 $f(x)$ 为图象开口向下的二次函数, 对称轴为直线 $x = 0$, 又 $f(-1) = 3$, $f(2) = 0$, 所以其值域为 $(-\infty, 3)$, 符合题意;

对于 D 选项, 分离常数可得 $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$, $x \geq 0$, 因为 $x+1 \geq 1$, 所以 $\frac{4}{x+1} \in (0, 4]$, 则 $4 - \frac{4}{x+1} \in [0, 4)$, 符合题意.

13. B 【解析】函数 $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象开口向



上,对称轴为直线 $x=1$,当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, y 随着 x 的增大而减小,当 $x \in (1, +\infty)$ 时, y 随着 x 的增大而增大.

对于 A, $x \in [-1, 0]$, 因为当 $x=0$ 时, $y=2$, 当 $x=-1$ 时, $y=5$, 所以值域为 $[2, 5]$, 故 A 错误;

对于 B, $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, 因为 $|0-1| > \left|\frac{3}{2}-1\right|$, 当 $x=1$ 时, $y=1$, 当 $x=0$ 时, $y=2$, 所以值域为 $[1, 2]$, 故 B 正确;

对于 C, $x \in [1, 3]$, 因为当 $x=1$ 时, $y=1$, 当 $x=3$ 时, $y=5$, 所以值域为 $[1, 5]$, 故 C 错误;

对于 D, $x \in [-1, 1]$, 因为当 $x=1$ 时, $y=1$, 当 $x=-1$ 时, $y=5$, 所以值域为 $[1, 5]$, 故 D 错误.

14. A



思路导引

函数解析式中含有根式, 可利用“换元法”, 令 $\sqrt{1-2x} = t$, 再结合二次函数的图象和性质求值域.

【解析】由题意知, 函数的定义域为

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right], y = 1 + x + \sqrt{1-2x} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-2x})^2 + \sqrt{1-2x} + \frac{3}{2}, \text{ 令 } \sqrt{1-2x} = t, t \in [0, +\infty), \text{ 则 } y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2},$$

由二次函数的图象和性质可知, 当

$t \in [0, 1]$ 时, y 随 t 的增大而增大, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, y 随 t 的增大而减小, 所以

$$y \leq -\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2, \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时,}$$

$y \rightarrow -\infty$, 故函数 $y = 1 + x + \sqrt{1-2x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 故选 A.

方法总结

形如 $g(x) = mx + n \pm \sqrt{ax+b}$ ($am \neq 0$) 的含根式函数, 一般令 $t = \sqrt{ax+b}$, 将已知函数转化为二次函数, 但要注意确定 t 的取值范围. 当然, 这也适用于形如 $g(x) = mx^2 + n \pm \sqrt{ax^2+b}$ ($am \neq 0$) 的函数.

15. C 【解析】显然, $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{2(x+1)^2 - (x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{x^2+4x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} +$$

$$\frac{2}{x + \frac{1}{x}}.$$



令 $t = x + \frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, $t = x + \frac{1}{x} \geq$

$2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成

立, 则 $0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{3}{2}$;

当 $x < 0$ 时, $t = x + \frac{1}{x} \leq -2$.

$\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = -2$, 当且仅当 $x = -1$

时, 等号成立, 则 $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{t} < 0$, 则 $-\frac{1}{2} \leq$

$f(x) < \frac{1}{2}$.

综上, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, 所以根

据高斯函数的定义, 函数 $y = [f(x)]$ 的值域是 $\{-1, 0, 1\}$, 故选 C.

16. 1 0 【解析】由题中函数的图象可得 $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, 则 $f(f(4)) = f(2) = 0$.

17. 3 【解析】因为函数 $f(x)$ 对于任意的正实数 x, y 都满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$,

所以令 $x = y = 2$, 可得 $f(4) = f(2) + f(2) = 2$,

令 $x = 2, y = 4$, 可得 $f(8) = f(2) + f(4) = 3$.

18. $\frac{1\ 349}{2}$ 【解析】因为 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$$\frac{x}{3+3x} + \frac{\frac{1}{x}}{3+3 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1+x}{3+3x} = \frac{1}{3}, f(1) = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2\ 024}\right) + f\left(\frac{1}{2\ 023}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2\ 023) + f(2\ 024) = \frac{1}{3} \times 2\ 023 + \frac{1}{6} = \frac{4\ 047}{6} = \frac{1\ 349}{2}.$$

19. D 【解析】对于 A, $y = 2|x|$ 和 $y = 2x$ 的对应关系不相同, 不是同一个函数, 故选项 A 不符合题意;

对于 B, $y = \sqrt{4x^2} = 2|x|$ 和 $y = 2x$ 的对应关系不相同, 不是同一个函数, 故选项 B 不符合题意;

对于 C, 函数 $y = \frac{2x^2}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 函数 $y = 2x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 定义域不相同, 不是同一个函数, 故选项 C 不符合题意;

对于 D, 函数 $y = \sqrt[3]{8x^3} = 2x$ 与 $y = 2x$ 的定义域和对应关系都相同, 是同一个函数, 故选项 D 符合题意.

故选 D.



关键点拨 判断两个函数是否为同一个函数,要严格按定义的三要素:对应关系、定义域和值域来检验.注意,由定义域和对应关系即可以确定函数的值域,故通过比较两个函数的定义域和对应关系就可确定两个函数是否相同,但有时为了方便,也用函数的值域进行判断,若值域不同,则必不是相同的函数.

20. C 【解析】对于 A, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $g(x) = x$, 对应关系不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 B, $f(x) = 1$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x) = x^0$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 定义域不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 C, $g(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$ 与

$f(x)$ 的对应关系相同, 且 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 是同一函数, 故正确;

对于 D, $f(x) = x+3$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ 的定义域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, 定义域不同, 不是同一函数, 故错误.



对点上分

1. ACD 【解析】函数 $y = x^2 + x^0$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

函数 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 \mathbf{R} ;

函数 $y = \frac{x^2-1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

函数 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

故选 ACD.

2. D 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 0)$, $g(x) = f(2-x^2) + f(x-2)$,

则 $\begin{cases} -2 < 2-x^2 < 0, \\ -2 < x-2 < 0, \end{cases}$ 解得 $\sqrt{2} < x < 2$,

故函数 $g(x)$ 的定义域为 $(\sqrt{2}, 2)$.

故选 D.

3. ABD 【解析】要使函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 有意义,

则 $2-x > 0$, 即 $x < 2$,

所以 $A = \{x | x < 2\}$, 即 $A = (-\infty, 2)$,

因为 $y = x^2 + 1 \geq 1$, 所以 $B = \{y | y = x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$, 即 $B = [1, +\infty)$.

所以 $A \cup B = (-\infty, 2) \cup [1, +\infty) = \mathbf{R}$,

$A \cap B = (-\infty, 2) \cap [1, +\infty) = [1, 2)$,

$(\complement_{\mathbf{R}} B) \cup A = (-\infty, 1) \cup (-\infty, 2) = (-\infty, 2)$, 故 A, B, D 正确, C 错误. 故选 ABD.

4. A 【解析】由函数 $f(3x+2)$ 的定义域为 $(0,$



1), 即 $0 < x < 1$, 得 $2 < 3x+2 < 5$, 令 $2 < 2x-1 < 5$, 解得 $\frac{3}{2} < x < 3$, 所以函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. 故 A 正确.

易错警示 忽略抽象函数的特征而致错

函数的定义域是函数自变量 x 的取值范围, 即若函数 $f(g(x))$ 的定义域为 A , 指的是 $x \in A$, 而不是 $g(x) \in A$.

5. C 【解析】当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x} = x +$

$$\frac{4}{x} + 4 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} + 4 = 8, \text{ 当且仅当 } x = 2$$

时, 等号成立;

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x} = -\left(-x + \frac{4}{-x}\right) +$$

$$4 \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}} + 4 = 0, \text{ 当且仅当 } x = -$$

2 时, 等号成立.

综上所述, $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$. 故选 C.

6. AB 【解析】对于 A, 因为 $f(x) =$

$$\frac{5}{2x^2-4x+3} = \frac{5}{2(x-1)^2+1}, \text{ 所以 } 0 < f(x) \leq 5,$$

所以 $|f(x)| \leq 5$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 所以 $1-x^2 \geq 0$, 所以 $0 \leq x^2 \leq 1$, 所以 $0 \leq f(x) \leq 1$, $|f(x)| \leq 1$, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, } f(x) = \frac{3+x}{4-x} = \frac{-(4-x)+7}{4-x} = -1 + \frac{7}{4-x},$$

不存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$, 故 C 错误;

对于 D, $f(x) = 1 - \sqrt{x} \leq 1$, 不存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$, 故 D 错误. 故选 AB.

7. 【解】(1) 在函数 $f(x-1)$ 中, $2 \leq x \leq 3$, 则

$$1 \leq x-1 \leq 2, \text{ 所以 } 1 \leq 3x+2 \leq 2, \text{ 解得 } -\frac{1}{3} \leq$$

$x \leq 0$, 所以函数 $f(3x+2)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

(2) ①函数 $y = 3x^2 - x + 2$ 的定义域为 \mathbf{R} , 整

$$\text{理得 } y = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} \geq \frac{23}{12}, \text{ 当且仅当}$$

$$x = \frac{1}{6} \text{ 时, 等号成立, 所以函数 } y = 3x^2 - x + 2$$

的值域为 $\left[\frac{23}{12}, +\infty\right)$.

②函数 $y = x + 4\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty,$

$$1], \text{ 令 } t = \sqrt{1-x}, t \in [0, +\infty), \text{ 则 } x = 1-t^2,$$

$y = 1-t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 5$, 其图象开口向下, 对称轴为直线 $t = 2$, 所以当 $t \in [0, 2)$



时, y 随 t 的增大而增大, 当 $t \in [2, +\infty)$ 时, y 随 t 的增大而减小, 故其值域为 $(-\infty, 5]$, 所以函数 $y = x + 4\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty, 5]$.

8. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $mx^2 - 8x + m + 6 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $m = 0$ 时, $-8x + 6 \geq 0$ 不恒成立, 不合题意;

当 $m \neq 0$ 时, 由题意可得

$$\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 64 - 4m(m+6) \leq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } m \geq 2.$$

综上, m 的取值范围为 $[2, +\infty)$.

(2) 设函数 $y = mx^2 - 8x + m + 6$ 的值域为 D .

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 所以 $[0, +\infty) \subseteq D$.

当 $m = 0$ 时, $f(x) = \sqrt{-8x+6}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 满足题意;

当 $m \neq 0$ 时, 由题意知

$$\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 64 - 4m(m+6) \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m \leq 2.$$

综上, m 的取值范围为 $[0, 2]$.



综合上分

9. 27 7 【解析】因为定义域中有三个元素: 1, 2, 3, 其中每个元素都可以对应到集合 B 中的三个元素中的任意一个, 所以对应关系共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (种), 所以函数的个数为 27.

将对应关系分为: 一对一, 多对一 (二对一、三对一).

若为一对一, 则值域为 $\{1, 2, 3\}$, 共 1 种情况;

若为二对一, 则值域为 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, 共 3 种不同的情况;

若为三对一, 则值域为 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, 共 3 种不同的情况.

所以值域共有 7 种不同的情况.

3.1.2 函数的表示法



基础上分

1. C 【解析】由题知该长方形的一边长度为 x , 且面积为 S .

则另一边长为 $\frac{S}{x}$, 且 $x > 0$.

所以该长方形的周长 $L = 2x + \frac{2S}{x}$ ($x > 0$).

故选 C.

2. B 【解析】因为 $x = 1$ 满足 $x \in (0, 2]$, 所以 $m = f(1) = -2$,

由题表可知 y 的取值仅有三个: 1, 0, -2,



所以 $f(x)$ 的值域 $M = \{1, 0, -2\}$, 故选 B.

 **提示:** 本题函数 $f(x)$ 用列表法表示, 值域是表格中实数 y 的集合


3. D 【解析】依题意, 函数 $y = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 其图象由直线 $y = x-1$ 在 $x < 0$ 的部分与直线 $y = x+1$ 在 $x > 0$ 的部分组成, 故 D 正确.

易错警示 画函数图象时忽略等价变形而致错

在对函数解析式进行变形的过程中, 一定要注意等价性, 特别要注意定义域是否发生变化.

4. C 【解析】因为水的流速不变, 所以相同时间内流出水的体积一样, 而容器的特征是上、下细, 中间粗, 故使得 h 关于 t 的变化曲线下降速度由快到慢, 再变快, 只有 C 选项符合. 故选 C.
5. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 是一次函数, 所以设 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$.
因为 $f(x-1) = 4x+3$, 所以 $a(x-1) + b = 4x+3$, 则 $\begin{cases} a=4, \\ -a+b=3, \end{cases}$ 解得 $a=4, b=7$, 所以函数 $f(x) = 4x+7$. 故 B 正确.

6. A

 **思路导引** 本题已知复合函数 $f(\sqrt{x}-1) = x-2\sqrt{x}$ 的解析式, 求 $g(x) = f(x+1)$ 的解析式, 因此须先求出 $f(x)$ 的解析式, 可用“换元法”或“配凑法”.

【解析】(换元法) 设 $t = \sqrt{x}-1 (t \geq -1)$, 则 $x = (t+1)^2$, 所以 $f(t) = t^2-1 (t \geq -1)$, 要使得 $g(x) = f(x+1)$ 有意义, 则需 $x+1 \geq -1$, 解得 $x \geq -2$, 所以 $g(x) = (x+1)^2-1 (x \geq -2)$, 故选 A.

一题多解 (配凑法) 因为 $f(\sqrt{x}-1) = x-2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2-1$, 且 $\sqrt{x}-1 \geq -1$, 所以 $f(x) = x^2-1 (x \geq -1)$, 所以 $g(x) = f(x+1) = (x+1)^2-1 (x+1 \geq -1)$, 即 $g(x) = (x+1)^2-1 (x \geq -2)$, 故选 A.

易错警示 求解析式时忽略函数的定义域而致错

已知函数 $y = f(g(x))$ 的解析式, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式时, 若函数 $y = g(x)$ 的值域不是全体实数, 则所求得的函数 $y = f(x)$ 的解析式必须写明定义域 (即函数 $y = g(x)$ 的值域), 如本题中函数 $y = f(x)$ 的定义域就是 $y = \sqrt{x}-1$ 的值域.



7. D



思路导引

所给出的等式是含 $f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程, 因此可考虑利用“消元法”求 $f(x)$ 的解析式.

【解析】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x + \frac{4}{x}$ ①,

方法: 已知的函数关系较为抽象, 可以对变量进行置换消元

用 $\frac{1}{x}$ 替换 x , $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x + \frac{6}{x}$ ②,

由 ② $\times 2$ - ①, 得 $3f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, 所以 $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3x}$, 故选 D.

8. D



思路导引

已知等式中涉及两个变量, 求函数值时可以先考虑利用“赋值法”求出函数的解析式, 再求函数值.

【解析】令 $x=y=0$, 得 $f(0)=1$.

令 $x=0$, 得 $-f(y) - 2f(-y) = y - 3$ ①,

将上式中的 y 换成 $-y$, 可得 $-f(-y) - 2f(y) = -y - 3$ ②,

联立 ① ②, 可得 $f(y) = y + 1$, 所以 $f(2\ 024) = 2\ 024 + 1 = 2\ 025$, 故选 D.

9. 【解】(1) 已知 $f(x) + 2f(-x) = x^2 + 2x$, 将 x 换为 $-x$, 得 $f(-x) + 2f(x) = x^2 - 2x$,

$$\text{联立} \begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x^2 + 2x, \\ f(-x) + 2f(x) = x^2 - 2x, \end{cases}$$

$$\text{得 } f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x.$$

(2) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$,

$$\text{则 } f(x-1) - f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c - ax^2 - bx - c = -2ax + a - b,$$

$$\text{所以 } -2ax + a - b = 4x - 3,$$

$$\text{得 } \begin{cases} -2a = 4, \\ a - b = -3, \end{cases} \text{ 解得 } a = -2, b = 1,$$

$$\text{故 } f(x) = -2x^2 + x + c.$$

又因为 $f(x)$ 的图象经过点 $A\left(2, -\frac{13}{2}\right)$,

$$\text{所以 } f(2) = -8 + 2 + c = -\frac{13}{2}, \text{ 解得 } c = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = -2x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

10. D 【解析】由条件可得 $f(-1) = 2$, 所以 $f(f(-1)) = f(2) = 6$, 故选 D.

11. C 【解析】因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 2, \\ 2x, & x > 2, \end{cases}$ 且 f

$$(m) = 18, \text{ 所以 } \begin{cases} m \leq 2, \\ m^2 + 2 = 18 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m > 2, \\ 2m = 18, \end{cases} \text{ 解}$$



得 $m = -4$ 或 $m = 9$. 故选 C.

12. D 【解析】当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 的值域为 $(1, +\infty)$.

当 $a = 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x, & x > 1, \\ 2x, & x \leq 1, \end{cases}$ 符合题意.

当 $a > 0$ 时, 函数 $y = ax^2 + 2x$ 的图象开口向上, 不符合题意.

当 $a < 0$, 且 $-\frac{2}{2a} \leq 1$, 即 $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的最大值为 $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$,
由题意可得 $-\frac{1}{a} \geq 1$, 解得 $-1 \leq a < 0$, 故 $a = -1$.

当 $a < 0$, 且 $-\frac{2}{2a} > 1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上, $f(x)$ 随 x 的增大而增大, 又 $f(1) = a + 2$, 所以 $a + 2 \geq 1$, 解得 $a \geq -1$, 故 $-1 < a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $[-1, 0]$. 故 D 正确.

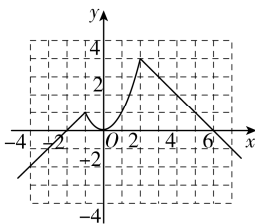
易错警示 不能正确理解分段函数而致错

求解分段函数问题, 必须根据函数的定义域找到每段图象相应的函数解析式, 而对于含参数的分段函数求值问题, 则应根据参数的取值分类讨论.

13. 【解】 (1) 根据分段函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x \leq 2, \\ -x+6, & x > 2, \end{cases}$$

画出函数的图象如图所示,



由图可得, 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得最大值 4.

(2) 当 $x \leq -1$ 时, $x + 2 \leq 1$, 所以 $f(x) < 2$ 恒成立;

当 $-1 < x \leq 2$ 时, 由 $x^2 < 2$, 得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 所以 $-1 < x < \sqrt{2}$;

当 $x > 2$ 时, 由 $-x + 6 < 2$, 得 $x > 4$.

综上所述, 不等式 $f(x) < 2$ 的解集为 $\{x \mid x < \sqrt{2} \text{ 或 } x > 4\}$.

14. C 【解析】由离家距离 S 与行走时间 t 之间的函数图象知, 张老师离开家时离家距离逐渐增加, 然后保持不变, 回家



时,离家距离逐渐减少,特别注意到中途有一段离家距离没变,所以为圆弧. 故选 C.

15. 【解】(1) 由题意得 $W(x) = 0.7 \times 1\,000x - R(x) - 250$, 故当 $0 < x < 40$ 时, $W(x) = 700x - 10x^2 - 100x - 250 = -10x^2 + 600x - 250$;

当 $x \geq 40$ 时, $W(x) = 700x - 701x - \frac{10\,000}{x} + 9\,450 - 250 = -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200$.

故 $W(x)$ (单位: 万元) 关于年产量 x (单位: 千部) 的函数解析式为

$$W(x) = \begin{cases} -10x^2 + 600x - 250, & 0 < x < 40, \\ -x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200, & x \geq 40. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x < 40$ 时, $W(x) = -10x^2 + 600x - 250 = -10(x-30)^2 + 8\,750$, 故当 $x = 30$ 时, $W(x)$ 取得最大值, 最大值为 8 750 万元;

当 $x \geq 40$ 时, 由基本不等式可知 $W(x) = -$

$$x - \frac{10\,000}{x} + 9\,200 = -\left(x + \frac{10\,000}{x}\right) +$$

$$9\,200 \leq 9\,200 - 2\sqrt{x \cdot \frac{10\,000}{x}} = 9\,000 \text{ (万$$

元), 当且仅当 $x = \frac{10\,000}{x}$, 即 $x = 100$ 时,

等号成立.

因为 $9\,000 > 8\,750$, 所以 2026 年的总年产量为 100 千部时, 企业所获利润最大, 最大利润为 9 000 万元.



对点上分

1. A 【解析】 根据图象及选项可知, 函数解析式可由 $y = |x|$ 变换得到. 将 $y = |x|$ 的图象沿 x 轴向下翻折, 再将图象向上平移 1 个单位长度, 可以得到 $f(x)$ 的图象, 故 $f(x) = -|x| + 1$. 故选 A.

快解

由题意可知 $f(1) = 0$, 排除 C,

D; 又 $f(-1) = 0$, 故排除 B. 故选 A.

2. B 【解析】 令 $t = 1 - x, t \neq 1$, 则 $x = 1 - t$, 可

$$\text{得 } f(t) = \frac{1 - (1-t)^2}{(1-t)^2} = \frac{1}{(t-1)^2} - 1 (t \neq 1), \text{ 故 } f$$

$$(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1). \text{ 故选 B.}$$

3. D 【解析】 根据题图可知 $x = 2$ 和 $x = 4$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内,

因此 $x = 2$ 和 $x = 4$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的

$$\text{两根, 可得 } f(x) = \frac{2}{a(x-2)(x-4)}, \text{ 由题图}$$

可知 $f(3) = 1$, 所以 $a = -2$, 即 $f(x) =$

$$-\frac{1}{(x-2)(x-4)}, \text{ 所以 } f(1) = -\frac{1}{3}. \text{ 故选 D.}$$



4. 【解】(1) 令 $x=1-t$, 则 $t=1-x$.

代入已知等式 $f(1-t)=1+t^2$, 可得 $f(x)=1+(1-x)^2=1+1-2x+x^2=x^2-2x+2$,

所以 $f(x)=x^2-2x+2, x \in \mathbf{R}$.

(2) 依题意, $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, 又

$y=x-\frac{1}{x}$ 的值域为 \mathbf{R} ,

所以 $f(x)=x^2+2 (x \in \mathbf{R})$.

(3) 由 $f(x)+3f(1-x)=2x+3$, 得 $f(1-x)+3f(x)=5-2x$,

两式联立消去 $f(1-x)$, 得 $8f(x)=12-8x$,

解得 $f(x)=\frac{3}{2}-x$,

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\frac{3}{2}-x$.

5. BC 【解析】由函数 $f(x)=$

$\begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x < 2 \end{cases}$ 知, 定义域为 $(-\infty, -1] \cup$

$(-1, 2)$, 即 $(-\infty, 2)$, A 错误;

当 $x \leq -1$ 时, $f(x)=x+2 \in (-\infty, 1]$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $x^2 \in [0, 4)$, 故 $x^2+1 \in [1, 5)$, 故值域为 $(-\infty, 5)$, B 正确;

由 B 选项分析可知当 $f(x)=3$ 时, $x \in (-1, 2)$, 即 $x^2+1=3$, 解得 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$ (舍去), 故 C 正确;

由 B 选项分析可知当 $f(x)=2$ 时, $x \in (-1, 2)$, 即 $x^2+1=2$, 解得 $x=1$ 或 $x=-1$ (舍去), 故 $f(x)$ 的图象与直线 $y=2$ 只有一个交点, 故 D 错误.

故选 BC.

6. C 【解析】令 $t=f(a)$, 则 $f(t) \leq -1$, 当 $t < 0$ 时,

→ **关键点** 因为 $f(a)$ 的符号不确定, 即 t 的符号不确定, 所以必须分类讨论

可得 $-t-2 \leq -1$, 解得 $t \geq -1$, 所以 $-1 \leq t < 0$.

当 $t \geq 0$ 时, 可得 $t^2-1 \leq -1$, 解得 $t=0$.

所以 $-1 \leq t \leq 0$, 所以 $-1 \leq f(a) \leq 0$.

当 $a < 0$ 时, 得 $-1 \leq -a-2 \leq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq -1$.

当 $a \geq 0$ 时, 得 $-1 \leq a^2-1 \leq 0$, 解得 $0 \leq a \leq 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $[-2, -1] \cup [0, 1]$. 故选 C.

7. $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$ 【解析】由 $x-1-$

$\frac{2}{x} \geq 0$, 得 $\frac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$,



$$\text{则} \begin{cases} x < 0, \\ (x+1)(x-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} x > 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0, \end{cases}$$

→ **提示**: 在解分式不等式时, 注意

分母不能为 0

解得 $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 2$.

由 $x-1-\frac{2}{x} < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $0 < x < 2$.

令 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x \neq 0)$,

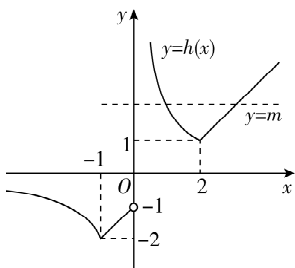
$$\text{则 } h(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1, 0) \cup [2, +\infty), \\ \frac{2}{x}, & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2), \end{cases}$$

在同一平面直角坐标系内作出直线 $y=m$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象如图所示,

→ **关键点** 正确画出函数 $h(x)$ 的图象

是求解问题的关键

观察图象知, 当 $-2 < m < -1$ 或 $m > 1$ 时, 直线 $y=m$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象有两个交点, 所以实数 m 的取值范围是 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$.



8. 【解】(1) 依题意, $f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + 2 \times (-\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$, $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$, 所以 $f\left(f\left(-\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$.

(2) 当 $a \leq -2$ 时, $f(a) = a + 1 = 3$, 解得 $a = 2$, 矛盾;

当 $-2 < a < 2$ 时, $f(a) = a^2 + 2a = 3$, 即 $a^2 + 2a - 3 = 0$, 解得 $a = -3$ 或 $a = 1$, 故 $a = 1$;

当 $a \geq 2$ 时, $f(a) = 2a - 2 = 3$, 解得 $a = \frac{5}{2}$.

所以当 $f(a) = 3$ 时, $a = 1$ 或 $a = \frac{5}{2}$.

(3) 由 $f(m) > m$, 得 $\begin{cases} m \leq -2, \\ m+1 > m \end{cases}$

或 $\begin{cases} -2 < m < 2, \\ m^2 + 2m > m \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m \geq 2, \\ 2m - 2 > m, \end{cases}$

解得 $m \leq -2$ 或 $-2 < m < -1$ 或 $0 < m < 2$ 或 $m > 2$, 所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup$



$(0, 2) \cup (2, +\infty)$.



综合上分

- 9.4 047** 【解析】令 $x=0$, 可得 $f(0+f(y))=f(f(y))=f(f(0))+y$ ①,
将 $y=f(y)$ 代入 ① 中, 得 $f(f(f(y)))=f(f(0))+f(y)$ ②.

方法: 迭代法的使用

根据题设及 ① 有 $f(f(f(y)))=f(f(f(0))+y)=f(f(y))+f(0)$ ③,

联立 ①②③, 有 $f(f(0))+f(y)=f(f(y))+f(0)=f(f(0))+y+f(0)$,

即 $f(y)=y+f(0)$.

令 $y=1$, 可得 $f(0)=2\ 023$, 因此 $f(2\ 024)=2\ 024+f(0)=2\ 024+2\ 023=4\ 047$.

3.1 节测上分

- 1. B** 【解析】根据 $y=g(x)$ 的图象可知, $g(1)=3$, 根据题表可知, $f(3)=0$. 故选 B.

- 2. BD** 【解析】对于 A, $y=\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x|x \geq 1\}$, $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 故二者定义域不同, 所以 $y=\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 和 $y=\sqrt{x^2-1}$ 不是同一个函数, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 4)$, 所以 $-2 < 2x < 4$, 解得 $-1 < x < 2$, 即函数 $f(2x)$ 的定义域为 $(-1, 2)$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $t=\sqrt{1-x}$, 则 $t \geq 0, x=1-t^2$,

所以 $y=2(1-t^2)-t=-2t^2-t+2=-2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t \geq 0)$,

因为当 $t \geq 0$ 时, y 随 t 的增大而减小, 所以 $y \leq 2$,

所以函数 $y=2x-\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{2}{x}$, 所以

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+2x,$$

$$\text{由} \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{2}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+2x, \end{cases}$$

解得 $f(x)=x(x \neq 0)$, 则 $f(2)=2$, 故 D 正确.

故选 BD.

- 3. D** 【解析】 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 令 $x=y=3$,



则 $f(3)+f(3)=f(9)$, 即 $2f(3)=6$, 可得 $f(3)=3$;

令 $x=y=\sqrt{3}$, 则 $f(\sqrt{3})+f(\sqrt{3})=f(3)$, 即 $2f(\sqrt{3})=3$, 可得 $f(\sqrt{3})=\frac{3}{2}$;

令 $x=3, y=\sqrt{3}$, 可得 $f(3\sqrt{3})=f(3)+f(\sqrt{3})=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$. 故 D 正确.

4. BD 【解析】依题意, 当 x 为有理数时, $F(F(x))=F(1)=1$, 当 x 为无理数时, $F(F(x))=F(0)=1$, 因此 $F(F(x))=1$ 恒成立, A 错误;

当 x 是有理数时, $F(x)=1=F(-x)$, 当 x 是无理数时, $F(x)=0=F(-x)$,

所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $F(x)=F(-x)$ 成立, B 正确;

当 T 是无理数, x 是有理数时, $x+T$ 是无理数, 有 $F(x+T)=0$, 而 $F(x)=1$, 此时 $F(x+T) \neq F(x)$, C 错误;

取 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=0, x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $F(x_1)=0, F$

$(x_2)=1, F(x_3)=0, A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), B(0,$

$1), C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$,

此时 $|AB|=|BC|=\frac{2\sqrt{3}}{3}=|AC|$, 即 $\triangle ABC$

为等边三角形, D 正确.

故选 BD.

5. -1 【解析】①当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $f(x)=(x-2)^2$,

当 $x=2$ 时, $f(x)=0$, 当 $x=4$ 时, $f(x)=4$, 故 $x \in [1, 4]$ 时, $f(x) \in [0, 4]$.

②当 $a \leq x < 1$ 时, $f(x)=2x+2$, 则 $f(x) \in [2a+2, 4)$.

结合题意可知 $[2a+2, 4) \subseteq [0, 4]$,

所以 $2a+2 \geq 0$, 解得 $a \geq -1$, 故 $-1 \leq a < 1$, 所以 a 的最小值为 -1 .

6 (2, 4)



思路导引

根据分段函数解析

式, 分别讨论当 $f(f(x_0))=f(x_0)+\frac{1}{2}$

或 $f(f(x_0))=2[1-f(x_0)]$ 时 $f(x_0)$ 的范

围, 结合 $x_0 \in A$ 确定 x_0 最终范围即可.

【解析】若 $f(f(x_0))=f(x_0)+\frac{1}{2} \in A$, 则 $0 \leq$



$$f(x_0) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x_0) < 0,$$

$$\text{由 } x_0 \in A \text{ 可得 } f(x_0) = x_0 + \frac{1}{2}, \text{ 则 } -\frac{1}{2} \leq x_0 + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow -1 \leq x_0 < -\frac{1}{2}, \text{ 矛盾;}$$

$$\text{若 } f[f(x_0)] = 2[1 - f(x_0)] \in A, \text{ 则 } 0 \leq 2[1 - f(x_0)] < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} < f(x_0) \leq 1,$$

$$\text{由 } x_0 \in A \text{ 可得 } f(x_0) = x_0 + \frac{1}{2}, \text{ 则 } \frac{3}{4} < x_0 + \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < x_0 \leq \frac{1}{2}, \text{ 故 } \frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2};$$

$$\text{即 } 2 < \frac{1}{x_0} < 4.$$

7. 【解】(1) 当 $t \leq 0$ 时, $f(t) = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3};$$

$$\text{当 } 0 < t < 1 \text{ 时, } f(t) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times t \times \sqrt{3}t = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2;$$

$$\text{当 } 1 \leq t < 2 \text{ 时, } f(t) = \frac{1}{2} \times (2-t) \times \sqrt{3}(2-t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}.$$

$$\text{综上所述, } f(t) = \begin{cases} \sqrt{3}, & t \leq 0, \\ \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2, & 0 < t < 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, 若 } 0 < m < 1, \text{ 则 } f(m) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}m^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } m = 1 \text{ (舍去) 或 } m = -1 \text{ (舍去);}$$

$$\text{若 } 1 \leq m < 2, \text{ 则 } f(m) = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2 - 4m + 4) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } m = 3 \text{ (舍去) 或 } m = 1.$$

$$\therefore 2a + b = 1, \frac{b}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{a} + \frac{2a+b}{b} = \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} + 1.$$

$$\because a, b \text{ 都是正实数, } \therefore \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{2a}{b}, \text{ 即}$$

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}-1 \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{1}{b} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2} + 1.$$



3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

课时 1 函数的单调性



基础上分

1. B 【解析】对于①,若对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 故①为假命题;

对于②, 由减函数的定义知, 若对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立, 则 $f(x)$ 为减函数, 所以若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能是减函数, 故②为真命题;

对于③, 由于 $x_2 > 0$, 则 $x_1 + x_2 > x_1$, 结合 $f(x_1) < f(x_1 + x_2)$ 可知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能是减函数, 故③为假命题. 所以真命题的个数为 1, 故 B 正确.

2. AB



思路导引

本题没有给出具体的解析式, 只有 x_1, x_2 与 $f(x_1), f(x_2)$ 及相关符号, 因此考虑利用“定义法”判断函数单调性.

【解析】对于 A, 由题意可知, 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 故 A 符合题意;

对于 B, 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq$

$$x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{所以} \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) > 0, \\ x_1 - x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) < 0, \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 > x_2, \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 < x_2, \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \text{ 恒成立,}$$

所以函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 故 B 符合题意;

对于 C, 例如 $f(x) = x^2$, 当 $x \in (-2, 4)$ 时,

$$-1 < 3, \text{ 且 } \frac{f(-1) - f(3)}{-1 - 3} = \frac{1 - 9}{-4} = 2 > 0, \text{ 但函数}$$

$f(x) = x^2$ 在 $(-2, 4)$ 上不是单调递增的, 而是先减后增的, 故 C 不符合题意;

对于 D, 由选项 B 可知 $f(x)$ 在 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$,

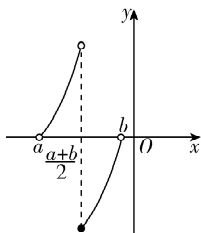
$\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ 上单调递增,

如图, 满足 $f(x)$ 在 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right), \left[\frac{a+b}{2}, b\right)$ 上单调递增,



但 $f(x)$ 在 (a, b) 上不单调,

→ **关键点** 只有当函数 $y=f(x)$ 在每个区间单调递增且图象连续时, 函数才在整个区间上单调递增



故 D 不符合题意. 故选 AB.

易错警示

函数不是定义域上的增(减)函数时, 往往仍有可能在其定义域的某个子区间上单调. 如“ $y = \frac{1}{x}$ ”不是定义域上的减函数, 但却在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递减, 所以在整个定义域上不具有单调性的函数, 有可能在其定义域的某个子区间上具有单调性. 反之, 在函数定义域的某个子区间上具有单调性的函数, 未必在其整个定义域上具有单调性.

3. C



思路导引

题中给出了函数图象, 因此利用“图象法”判断函数的单调性, 确定单调递减区间.

【解析】 根据函数图象可知, $f(x)$ 的单调递减区间为 $[-1, 0)$ 和 $[1, +\infty)$. 结合选项可知 **C 正确**.

易错警示

多个单调区间之间的表示出错

一个函数出现两个或两个以上单调递增(或递减)区间时, 单调递增(或递减)区间之间用“,” 隔开, 或者用“和”连接, 不能用“ \cup ”或“且”连接. 如: 函数 $y = \frac{1}{x}$, 其单调递减区间在书写时应写成“ $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ ”或“ $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ ”, 而不能写成“ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ”. 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 中任取 $x_1 < x_2$, 不一定有 $f(x_1) > f(x_2)$, 不满足单调递减的定义.

4. D



思路导引

四个选项中的函数解析式均由基本初等函数构成, 因此考虑根据基本初等函数的性质判断函数单调性.



【解析】在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) = x$ 单调递增, $f(x) = -\frac{1}{x}$ 单调递增.

→ **关键点** 掌握基本初等函数的单调性是解题的关键

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = |x| = -x$ 单调递减. 故选 D.

5. A



思路导引

函数 $f(x) =$

$\sqrt{-x^2+4x}$ 为复合函数, 因此利用“同增异减”判断函数的单调性.

【解析】 $\because -x^2+4x \geq 0, \therefore 0 \leq x \leq 4$.

\because 函数 $y = -x^2 + 4x$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减. 故选 A.

6. B 【解析】方法一: $\because g(x)$ 是减函数, $\therefore -g(x)$ 是增函数, $\therefore f(x) - g(x)$ 为增函数. 故选 B.

方法二(反例法): 设 $f(x) = x$ (增函数), $g(x) = -x$ (减函数), 则: $f(x) + g(x) = 0$ (常函数, 非减函数), 故 A 错误;

$f(x) \cdot g(x) = -x^2$ (非单调函数), 故 C 错误;

$\frac{f(x)}{g(x)} = -1$ (常函数, 非增函数), 故 D 错误. 故选 B.

方法总结

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的和与差的单调性(相同区间上)简记为: $\nearrow + \nearrow = \nearrow$; $\searrow + \searrow = \searrow$; $\nearrow - \searrow = \nearrow$; $\searrow - \nearrow = \searrow$.

7. A 【解析】函数 $f(x) = (1-x) \cdot |2-x| = \begin{cases} x^2-3x+2, & x < 2, \\ -x^2+3x-2, & x \geq 2. \end{cases}$ 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = -x^2 +$

$3x-2$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减; 当 $x < 2$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上单调递减,

在 $(\frac{3}{2}, 2)$ 上单调递增. 所以函数 $f(x)$ 的

单调递增区间为 $(\frac{3}{2}, 2)$, 故选 A.

8. $(-1, 1), (1, 3)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

函数 $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{(x-1)^2+2(x-1)+4}{x-1} =$

$(x-1) + \frac{4}{x-1} + 2$, 设 $x-1=t (t \neq 0)$, $g(t) = t +$



$$\frac{4}{t} + 2,$$

→ **提示**: 在利用换元法解题的时候, 要注意换元后新变量的取值范围

因为 $g(t)$ 在 $(-2, 0)$ 和 $(0, 2)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 1), (1, 3)$.

→ **提示**: 求出新构造函数的单调区间后, 注意还原到已知函数中

关键点拨

本题求分子为二次式, 分母为一次式的分式函数 $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ 的单调区间, 解题关键是将解析式转化为 $f(x) = px + q + \frac{m}{dx+e}$ 的形式, 然后结合基本不等式或函数性质等求解.

$$9. \text{【解】} (1) \text{ 由题意得 } \begin{cases} 2a - \frac{b}{2+1} = \frac{5}{3}, \\ a - \frac{b}{1+1} = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

(2) $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调

递增, 理由如下:

任取 $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = x_1 - \frac{1}{x_1+1} - x_2 + \frac{1}{x_2+1}$$

$$= x_1 - x_2 + \frac{1}{x_2+1} - \frac{1}{x_1+1}$$

$$= x_1 - x_2 + \frac{x_1 - x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}$$

$$= (x_1 - x_2) \left[1 + \frac{1}{(x_2+1)(x_1+1)} \right],$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$,

又 $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$, 所以 $1 +$

$$\frac{1}{(x_2+1)(x_1+1)} > 0,$$

$$\text{故 } f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \left[1 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(x_2+1)(x_1+1)} \right] < 0,$$

故 $f(x_1) < f(x_2)$, $y = f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

10. B

思路导引 由 $|f(x)| > 1$ 并结合函数 $f(x)$ 的单调性, 可以“去 f ”转化为一般不等式求解.

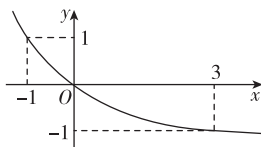
【解析】 由 $|f(x)| > 1$, 得 $f(x) > 1$ 或 $f(x) < -1$, 则 $f(x) > f(-1)$ 或 $f(x) < f(3)$.



又因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以可得 $x > 3$ 或 $x < -1$, 即 $|f(x)| > 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 故选 B.

一题多解 由题意可画出函数 $f(x)$ 的简图, 如图所示.

因为 $|f(x)| > 1$ 等价于 $f(x) > 1$ 或 $f(x) < -1$, 所以由 $f(x)$ 的简图可知 $|f(x)| > 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 故选 B.



11. C 【解析】当 $a = 0$ 时, $f(x) = x - 1$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直

线 $x = -\frac{1}{2a}$, 由题意得 $\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{1}{2a} \leq -2, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

综上, a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. 故 C 正确.

一题多解 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x - 1$, 其在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 故排除 BD; 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x^2 + x - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$, 其在 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 故排除 A. 故选 C.

易错警示 解决含参函数的单调性问题时忽略对参数的分类讨论而致错

对于求解形如 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的函数的单调性问题, 由于 a 的值不确定, 因此函数不一定是二次函数, 要对 a 的取值进行分类讨论. 本题中的易错之处是忽视二次项系数为 0 的情况.

12. C 【解析】对于 A, $\because y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的减函数, $a \neq 0$, 且 a 与 $2a$ 的大小关系不能确定, $\therefore f(a), f(2a)$ 的大小关系不确定, 故 A 错误;

提示: 当 $a > 0$ 时, $a < 2a$; 当 $a < 0$ 时, $a > 2a$

对于 B, $a^2 - a = a(a - 1)$, 当 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时, $a^2 > a$, 当 $0 < a < 1$ 时, $a^2 < a$, 故 $f(a^2), f(a)$ 的大小关系不确定, 故 B 错误;

对于 C, $\because a^2 + a - a = a^2 > 0$, $\therefore a^2 + a > a$,



$\therefore f(a^2+a) < f(a)$, 故 C 正确;

对于 D, $a^2+a-a-1 = a^2-1 = (a+1)(a-1)$, 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, $a^2+a > a+1$, 当 $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 1$ 时, $a^2+a < a+1$, 故 $f(a^2+a)$, $f(a+1)$ 的大小关系不确定, 故 D 错误. 故选 C.

13. B 【解析】因为对任意两个不相等的实数 a, b , 都有 $(a-b)[f(b)-f(a)] > 0$, 所以 $a-b$ 与 $f(a)-f(b)$ 异号, 故 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 所以不等式 $f(3x-1) < f(x+5)$ 等价于 $3x-1 > x+5$, 解得 $x > 3$, 故选 B.

14. C 【解析】根据题意, 函数 $f(x) = \frac{ax-1}{x-a} =$

$$\frac{a(x-a)+a^2-1}{x-a} = \frac{a^2-1}{x-a} + a.$$

若 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则必有

$$\begin{cases} a^2-1 > 0, \\ a \leq 2, \end{cases} \text{ 解得 } a < -1 \text{ 或 } 1 < a \leq 2, \text{ 即 } a \text{ 的}$$

取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, 2]$. 故 C 正确.

15. A 【解析】因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ 成立, 所以 $f(x)$

在 \mathbf{R} 上单调递减,

$$\text{则 } \begin{cases} -a-5 < 0, \\ -(a-1) \geq 2, \\ 2^2+2(a-1) \times 2-3a \geq (-a-5) \times 2-2, \end{cases}$$

解得 $-4 \leq a \leq -1$. 故选 A.

易错警示 忽略分段函数的单调性特征而致错

分段函数在给定区间上单调, 不仅要在每段都单调, 还要保证在分段点处不“反超”.

16. (思路导引) 由于本题涉及抽象函数, 故考虑利用赋值法求解(1), 进而判断单调性, 再利用“去 f ”的方法求解(3).

(1)【证明】令 $x=y=1$, 则 $f(1) = f(1) + f(1)$, 所以 $f(1) = 0$.

当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

在 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ 中, 令 $y = \frac{1}{x}$, 则 f

$(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 所以 $f(x) =$

$-f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

(2)【解】设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 所以

$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$.



于是 $f(x_2) = f\left(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) >$

$f(x_1)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 【解】 $f(x+1) + f(2x-3) > 0$ 等价于 $f((x+1)(2x-3)) > f(1)$.

由(2)知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $(x+1)(2x-3) > 1$, 且 $x+1 > 0, 2x-3 > 0$, 解

得 $x > \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

故所求不等式的解集是 $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$.



对点上分

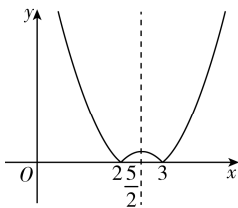
1. A 【解析】函数 $f(x) = x^2 - 2mx + 3 (m \in \mathbf{R})$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = m$, 由 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $m \leq 1$,

所以“函数 $f(x) = x^2 - 2mx + 3 (m \in \mathbf{R})$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增”是“ $m < 2$ ”的充分不必要条件.

故选 A.

2. C 【解析】函数 $y = x^2 - 5x + 6$ 图象的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$,

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 可得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 作出函数 $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ 的图象如下图所示.



由图可知, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 和 $(3, +\infty)$.

故选 C.

3. B



思路导引

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 由已知关系式可得 $f(x) = 3f(-x) + x^2 - 2x = -\frac{1}{2}x^2 - 5x$. 由二次函数性质可得 $f(x)$ 的单调递增区间.

【解析】当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$, 则 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $\therefore f(-x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$,

$\therefore f(x) = 3f(-x) + x^2 - 2x = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + x^2 -$



$2x = -\frac{1}{2}x^2 - 5x$, $f(x)$ 在 $(-\infty, -5]$ 上单调

递增, 在 $(-5, 0)$ 上单调递减.

综上所述, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -5]$ 和 $[0, 1]$.

故选 B.

4. CD 【解析】若 $f(x)$ 是“理想函数”, 设

$x_1 > x_2 > 0$, 由 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 可得

$$x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > 0,$$

所以 $x_2 f(x_1) > x_1 f(x_2)$, 即 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$,

所以函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

对于 A, $y = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

减, 所以 A 不符合题意;

对于 B, $y = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x}$, 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递减, 所以 B 不符合题意;

对于 C, $y = \frac{f(x)}{x} = x^2 - 1$, 由二次函数的性质

知其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 C 符合

题意;

对于 D, $y = \frac{f(x)}{x} = x$, 由一次函数的性质知

其在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 D 符合

题意.

故选 CD.

5. $[0, 3]$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域

为 $[-9, 9]$, 所以函数 $y = f(x^2)$ 的定义域对

应 $-9 \leq x^2 \leq 9$, 即 $x \in [-3, 3]$.

令 $t = x^2$, $t = x^2$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增, 在

$[-3, 0)$ 上单调递减.

又 $y = f(x)$ 在定义域上单调递增, 所以函数

$y = f(x^2)$ 的单调递增区间为 $[0, 3]$.


6. A 【解析】 $\because a + b > 0, \therefore a > -b, b > -a$.

\because 函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,

$\therefore f(a) > f(-b), f(b) > f(-a)$.

两式相加可得 $f(a) + f(b) > f(-a) + f(-b)$,

故选 A.

 **提示:** 本题考查抽象函数的单调性和不等式的性质, 属于基础题. 由 $f(b) > f(-a)$ 可得 $-f(b) < -f(-a)$, 无法使用同向可加性

7. D 【解析】当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当

且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立, 所以

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值 2, 故排除 BC;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x - \frac{1}{x}$,



因为 $y=x$ 和 $y=-\frac{1}{x}$ 都在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 故排除 A.
 故选 D.

8. $(2, +\infty)$



思路导引

构造函数法: 遇到

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 2, \text{ 构造 } g(x) = f(x) - 2x,$$

可得到 $g(x)$ 的单调性. 推导:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 2 \rightarrow \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > 0, \text{ 故}$$

$g(x)$ 是增函数.

【解析】令 $g(x)=f(x)-2x$,

因为对任意 x_1, x_2 且 $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 2,$$

$$\text{所以 } \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 2$$

$$= \frac{[f(x_1)-2x_1] - [f(x_2)-2x_2]}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > 0,$$

所以 $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数,

又 $f(2)=4$, 则 $g(2)=f(2)-2 \times 2=4-4=0$,

由 $f(x) > 2x$ 得 $f(x)-2x > 0$,

即 $g(x) > 0 = g(2)$,

→ **关键点** 不等式 $f(x) > 2x$ 转化为

$$g(x) > g(2);$$

又 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,

所以 $x > 2$,

所以不等式 $f(x) > 2x$ 的解集为 $(2, +\infty)$.

9. 【解】(1) $f(x) = \sqrt{x-k}$ 在 $[k, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为

$$\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right], \therefore f(a) = \frac{a}{2}, f(b) = \frac{b}{2}.$$

\therefore 方程 $\sqrt{x-k} = \frac{x}{2}$ 有两个不相等的实根,

则 $x \geq k$, 且 $x \geq 0$,

\therefore 方程 $x^2 - 4x + 4k = 0$ 在 $[k, +\infty) \cap [0, +\infty)$ 上有两个不相等的实根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (-4)^2 - 4 \times 4k > 0, \\ 2 > k, \\ k^2 - 4k + 4k \geq 0, \\ 4k \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 \leq k < 1, \therefore k$$

的取值范围是 $[0, 1)$.

(2) 由题意知 $k=0, f(x) = \sqrt{x}$.

由 $f(x^2 - 4x - 12) < -x^2 + 4x + 24$,

得 $\sqrt{x^2 - 4x - 12} < -x^2 + 4x + 24$, 整理得

$$\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x^2 - 4x - 12 < 12.$$



设函数 $g(x) = \sqrt{x} + x$, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 注意到 $g(9) = 12$,

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x - 12} + x^2 - 4x - 12 < 12$ 等价于 $0 \leq x^2 - 4x - 12 < 9$.

由 $x^2 - 4x - 12 \geq 0$, 解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$,

由 $x^2 - 4x - 12 < 9$, 解得 $-3 < x < 7$,

\therefore 原不等式的解集为 $(-3, -2] \cup [6, 7)$.



综合上分

10. $c < b < a$ 【解析】设 $x < y$, 且满足 $-1 < x < y < 1$,

由 $x+1 > 0$, 有 $(x+1)y < x+1$, 则 $xy - 1 < x - y < 0$,

可得 $1 > \frac{x-y}{xy-1} > 0$, 则 $-1 < \frac{x-y}{1-xy} < 0$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < 0$,

所以 $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) < 0$, 即 $f(x) - f(y) < 0$, 所以 $f(x) < f(y)$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为增函数.

因为 $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$, 所以 $f(x) = f(y) + f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$,

取 $y = \frac{3}{7}$, $\frac{x-y}{1-xy} = \frac{1}{3}$, 则 $x = \frac{2}{3}$,

则 $a = f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$,

因为 $0 < \frac{4}{7} < \frac{2}{3}$, 所以 $f(0) < f\left(\frac{4}{7}\right) <$

$f\left(\frac{2}{3}\right)$, 即 $c < b < a$.

课时2 函数的最大(小)值



基础上分

1. C 【解析】对于①, 例如 $f(x) = -x^2 + 2$, 存在常数 $M = 3$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \leq 3$, 但 $f(x)$ 的最大值为 2, 故①错误.

对于②③, 由函数最大值的定义, 一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果存在实数 M 满足: $\forall x \in I$, 都有 $f(x) \leq M$ 且 $\exists x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = M$, 那么称 M 是函数 $y = f(x)$ 的最大值, 故②, ③正确.

对于④, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则

$f(x)_{\min} = -1, f(x)_{\max} = 1$, 但值域为 $\{-1, 1\}$, 故④错误. 故选 C.

2. B 【解析】函数 $y = \frac{1}{x+3}$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上

单调递减, 即当 $x = 1$ 时, y 取得最小值, 且

最小值为 $\frac{1}{4}$. 故 B 正确.



3. C



思路导引

函数的解析式主要由 x 的一次式构成, 因此可考虑利用单调性求值域的通法来求解.

【解析】 函数 $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$ 的定义域为 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 由 $y = x$ 和 $y = \sqrt{2x-3}$ 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上均单调递增, 可得 $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$ 在 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 有最小值 $\frac{3}{2}$, 无最大值. 故 C 正确.

易错警示

求函数值域时, 忽略函数的定义域而致错

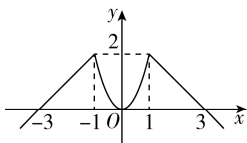
求函数的值域, 首先是求函数的定义域, 再判断函数的单调性, 再利用这两个条件求解值域.

4. C **【解析】** 由 $2x^2 = 3 - |x|$, 可得 $2|x|^2 + |x| - 3 = 0$,

解得 $|x| = 1$ 或 $-\frac{3}{2}$ (舍去),

解得 $x = \pm 1$,

画出函数 $m(x)$ 的图象,



由图象可知当 $x = \pm 1$ 时, $m(x)$ 取得最大值 2.

故选 C.

5. C **【解析】** 因为 $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$, $-2 \leq x \leq 3$,

令 $t = x + 1$, 则 $-1 \leq t \leq 4$,

$$\text{所以 } z = \frac{y-3}{x+1} = \frac{\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 3}{x+1} = \frac{x-18}{5(x+1)} = \frac{x+1-19}{5(x+1)} = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}, \text{ 显然 } t \neq 0,$$

所以当 $-1 \leq t < 0$ 时, $z = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}$ 单调递增,

所以 $z_{\min} = \frac{1}{5} + \frac{19}{5} = 4$, 故 $\frac{y-3}{x+1} \in [4, +\infty)$;

当 $0 < t \leq 4$ 时, $z = \frac{1}{5} - \frac{19}{5t}$ 单调递增, 所以

$$z_{\max} = \frac{1}{5} - \frac{19}{20} = -\frac{3}{4}, \text{ 故 } \frac{y-3}{x+1} \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right].$$

综上, $\frac{y-3}{x+1} \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [4, +\infty)$, 四个选项中只有 3 不在此范围内.

故选 C.

**6. A 【解析】** $f(x) + xf(1-x) + 1 = 0$, ①

用 $1-x$ 替换 x 得 $f(1-x) + (1-x)f(x) + 1 = 0$, ②

$$\text{①} - x \times \text{②} \text{ 得 } f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}.$$

设 $x-1=t$, 当 $t=0$ 时, $f(x)=0$;

当 $t \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$ 可转化为函数

$$g(t) = \frac{t}{t^2+t+1} = \frac{1}{t + \frac{1}{t} + 1},$$

当 $t > 0$ 时, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, 当且仅当 $t=1$ 时, 等

号成立, $g(t) \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$,

当 $t < 0$ 时, $t + \frac{1}{t} \leq -2$, 当且仅当 $t=-1$ 时,

等号成立, $g(t) \in [-1, 0)$,

所以当 $t + \frac{1}{t} = 2$, 即 $t=1$ 时, $g(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{3}$,

当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(2) = \frac{1}{3}$.

综上, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$, 故选 A.

7. 【解】由题意, 得 $S_{\triangle AEH} = S_{\triangle CFG} = \frac{1}{2}x^2$,

$$S_{\triangle BEF} = S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2}(a-x)(2-x),$$

所以 $y = S_{\text{矩形}ABCD} - 2S_{\triangle AEH} - 2S_{\triangle BEF} = -2x^2 +$

$$(a+2)x, \text{ 又因为 } \begin{cases} x > 0, \\ a-x > 0, \\ 2-x \geq 0, \\ a > 2, \end{cases}$$

所以 $0 < x \leq 2$, 故 $y = -2x^2 + (a+2)x$ 的定义域为 $(0, 2]$.

$$\text{因为 } y = -2x^2 + (a+2)x = -2 \left(x - \frac{a+2}{4} \right)^2 + \frac{(a+2)^2}{8},$$

又 $2 < a < 6$, 故 $1 < \frac{a+2}{4} < 2$, 所以函数 $y =$

$-2x^2 + (a+2)x$ 在 $\left(0, \frac{a+2}{4}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{a+2}{4}, 2\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以当 } x = \frac{a+2}{4} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{(a+2)^2}{8}.$$

8. AB 【解析】记 $y = f(x) = ax + 1$, 由题知 $a \neq 0$.

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ax + 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则 $f(2) - f(1) = (2a+1) - (a+1) = 2$, 解得 $a=2$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) = ax + 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递



减, 则 $f(1) - f(2) = (a+1) - (2a+1) = 2$, 解得 $a = -2$.

综上, $a = \pm 2$. 故 AB 正确.

易错警示 已知最值求参数的取值(范围)时忽略对参数进行分类讨论而致错

涉及函数 $f(x) = \frac{k}{x}$ 或 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) 的单调性或最值时, 若 k 的正负不确定, 则必须对 k 进行分类讨论. 本题易错之处是忽视对系数的讨论而认为函数只是增函数或减函数中的一种.

9. A 【解析】 $f(x) = \frac{x+a}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1}$, 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 1$, 不符合题意;

→ **提示**: 由于 a 的取值范围对函数的单调性有影响, 故需分类讨论

当 $a-1 > 0$, 即 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, $f(x)_{\max} = f(0) = a = 3$, 符合题意;

当 $a-1 < 0$, 即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{a+1}{2} = 3$, 解得 $a = 5$, 与 $a < 1$ 矛盾, 舍去.

→ **易错**: 解出 a 的值后, 未考虑 $a < 1$ 这个大前提, 从而错选 D
综上所述, $a = 3$. 故选 A.

10. B 【解析】 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} + t, & x > 0, \\ x^2 + 2tx + t^2, & x \leq 0, \end{cases}$

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} + t \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + t = 2 + t$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立;

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2tx + t^2 = (x+t)^2$, 要使 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 只需 $f(x) = x^2 + 2tx + t^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $2+t \geq f(0) = t^2$, 即 $\begin{cases} -t \geq 0, \\ t^2 - t - 2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq t \leq 0$.

故 B 正确.

11. [2, 4]



思路导引 本题函数的解析式中虽然含有绝对值, 但其单调性易判断, 因此考虑利用单调性求值域的通法求解.

【解析】 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[0, 2]$. 当 $a \geq 2$ 时, $f(x) = |x-2| = x-2$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 值域为 $[a-2, b-2]$, 于是 $a-2 = 0, b-2 = 2$, 解得 $a = 2, b = 4$, 所以 $b-a = 2$.



当 $b \leq 2$ 时, $f(x) = |x-2| = 2-x$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递减, 值域为 $[2-b, 2-a]$, 则 $2-a=2, 2-b=0$, 解得 $a=0, b=2$, 所以 $b-a=2$.

当 $a < 2 < b$ 时, $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x, & a \leq x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x \leq b, \end{cases}$ 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, 2)$ 上单调递减, 在区间 $[2, b]$ 上单调递增, 故值域为 $[0, 2-a]$ 或 $[0, b-2]$.

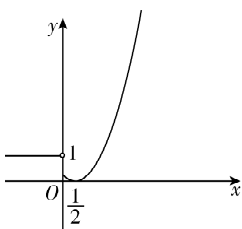
若 $\begin{cases} 2-a=2, \\ 0 < b-2 \leq 2, \end{cases}$ 则 $2 < b-a \leq 4$;

若 $\begin{cases} b-2=2, \\ 0 < 2-a \leq 2, \end{cases}$ 则 $2 < b-a \leq 4$.

综上, $b-a$ 的取值范围为 $[2, 4]$.

12. (1) 0 (2) $\left[0, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right]$

【解析】(1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 其图象如图所示.



所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 0.

(2) 由(1)知当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 0, 符合题意;

若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 当 x 趋近于 $-\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $-\infty$, 此时没有最小值;

若 $a > 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递减, 此时 $f(x) > -a^2 + 1$,

$$\text{当 } x \geq a \text{ 时, } f(x)_{\min} = \begin{cases} 0, & 0 < a < \frac{1}{2}, \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, & a \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ -a^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \geq \frac{1}{2}, \\ -a^2 + 1 \geq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < a \leq \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right]$.

13. B 【解析】由于 $x > \frac{2a+1}{a-1}$ 对任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 而函数 $y=x$ 在 $[1, 2]$ 上



单调递增,其最小值为 1,故 $\frac{2a+1}{a-1} < 1$, 进

而 $\frac{2a+1}{a-1} - 1 < 0$,

提示: 在解分式方程、不等式时,如果直接将分子、分母交叉相乘,可能会导致分母为零的情况出现,故只能移项通分

即 $\frac{a+2}{a-1} < 0$, 解得 $-2 < a < 1$, 故选 B.

14. C



思路导引

本题中的不等式能成立问题可转化为求函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最大值来解决.

【解析】 因为 $x \in [1, 2]$, 所以不等式 $a \leq x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上有解, 则只需 $a \leq \left(x + \frac{1}{x} \right)_{\max}$, 又函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x = 2$ 时, $y = x + \frac{1}{x}$ 取得最大值, 则 $\left(x + \frac{1}{x} \right)_{\max} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, 所以 $a \leq \frac{5}{2}$, 故 C 正确.

关键点拨

求解二次函数不等式在闭区间上的能成立问题, 可以运用分离参数法、讨论法、数形结合法以及最值法等多种方法. 在具体求解过程中, 要根据不等式的具体形式和闭区间的特点来选择合适的方法, 并灵活运用二次函数的性质来求解参数的范围.

15. $\left[\frac{5}{2}, +\infty \right)$ **【解析】** 令 $t = \sqrt{x}$, $t \in [0, \sqrt{6}]$, \therefore 当 $x \in [0, 6]$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立,

\therefore 当 $t \in [0, \sqrt{6}]$ 时, $t^2 - 4t + 2m \geq 1$ 恒成立, 即 $2m \geq -t^2 + 4t + 1$ 恒成立.

$\therefore -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$, $t \in [0, \sqrt{6}]$,

\therefore 当 $t = 2$ 时, $-t^2 + 4t + 1$ 取得最大值 5,

$\therefore 2m \geq 5$, 解得 $m \geq \frac{5}{2}$.

\therefore 实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{5}{2}, +\infty \right)$.

16. **【解】** (1) 若 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $g(x) \leq 0$ 成立, 则只需 $\Delta = 4 - 4k \geq 0$, 解得 $k \leq 1$.

故 k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(2) 若 $\forall x \in [-1, 2]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 则

$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} < m < 1$, 又 $m \neq 0$,

故 m 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup (0, 1)$.



(3) 当 $k=3$ 时, $g(x)=x^2+2x+3$,

若 $\forall x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [-1, 2]$, 满足 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则只需 $\forall x_1 \in [1, 2]$, 有 $f(x_1) \leq g(x_2)_{\max}$,

当 $x_2 \in [-1, 2]$ 时, $g(x_2)_{\max} = g(2) = 11$,
故 $\forall x_1 \in [1, 2]$, 有 $f(x_1) \leq 11$,

则有 $\begin{cases} f(1) \leq 11, \\ f(2) \leq 11, \end{cases}$ 解得 $m < 0$ 或 $0 < m \leq 5$,

所以 m 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 5]$.

17. 【解】 由 $f(4) = 8, f(-1) = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{cases} \frac{4a}{4+b} = 8, \\ \frac{-a}{-1+b} = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a = 8+2b, \\ 2a = 1-b, \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = -3$, 所以 $f(x) = \frac{2x}{x-3} =$

$$\frac{2x-6+6}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3},$$

当 $x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{17}{4}\right]$ 时, $f(x) - \frac{3}{2x-9} = 2 + 9 \times \frac{x-5}{2x^2-15x+27}$.

令 $x-5=t$, 则 $t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right]$, $x=t+5$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) - \frac{3}{2x-9} &= 2 + \frac{9t}{2t^2+5t+2} = \\ &= 2 + \frac{9}{2t + \frac{2}{t} + 5}. \end{aligned}$$

由对勾函数的性质易知, $y = 2t + \frac{2}{t}$ 在

$\left[-\frac{3}{2}, -1\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-1, -\frac{3}{4}\right]$ 上

单调递减, 则 $y = 2t + \frac{2}{t} \in \left[-\frac{13}{3}, -4\right]$,

$$\text{所以 } f(x) - \frac{3}{2x-9} = 2 + \frac{9}{2t + \frac{2}{t} + 5} \in$$

$$\left[11, \frac{31}{2}\right], \text{ 则对任意的 } x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{17}{4}\right],$$

$f(x) \geq \frac{3}{2x-9} + 4m^2 + 7m$ 恒成立可转化为

$11 \geq 4m^2 + 7m$, 即 $(4m+11)(m-1) \leq 0$, 解

$$\text{得 } -\frac{11}{4} \leq m \leq 1.$$

所以 m 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{4}, 1\right]$.



对点上分

1. BC 【解析】 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=1$.

在选项 A 中, 因为 $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上单调递减,



所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上的最小值为 $f(0) = 2$, **A 错误**.

在选项 B 中, 因为 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有最小值 $f(1) = 1$.

又因为 $f(-1) = 5, f(2) = 2$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有最大值 5, **B 正确**.

在选项 C 中, 因为 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上的最小值为 $f(2) = 2$, 最大值为 $f(3) = 5$, **C 正确**.

在选项 D 中, 当 $1 < a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上的最大值为 $f(0) = 2$,

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上的最大值为 $f(a)$, **D 错误**.

故选 BC.

2. D 【解析】记 $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$, 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, 所以当 $x = 1$ 时, 函数取得最小值 2.

因为 $f(0) = f(2) = 3$, 而函数在闭区间 $[0, m]$ 上有最大值 3, 最小值 2, 所以 $1 \leq m \leq 2$, **故选 D**.

3. $\frac{9}{5}$ 【解析】 $f(x) = x^2 - 2tx + 1 = (x-t)^2 + 1 - t^2$, $x \in [2, 5]$, 由 $f(x)$ 具有严格的单调性知 $t \leq 2$ 或 $t \geq 5$.

当 $t \leq 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2tx + 1$ 在 $[2, 5]$ 上单调递增,

故当 $x = 5$ 时, $f(x)$ 取得最大值, $f(5) = 25 - 10t + 1 = 8$, 解得 $t = \frac{9}{5}$, 满足 $t \leq 2$.

当 $t \geq 5$ 时, $f(x) = x^2 - 2tx + 1$ 在 $x \in [2, 5]$ 上单调递减,

故当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得最大值, $f(2) = 4 - 4t + 1 = 8$, 解得 $t = -\frac{3}{4}$, 与 $t \geq 5$ 矛盾, 舍去.

综上, $t = \frac{9}{5}$.

4. 【解】(1) 因为 $f(1) = 0$, 所以 $a + c = \frac{1}{2}$, 又 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 所以 $ax^2 - \frac{1}{2}x + c \geq 0$ 恒成立. 当 $a = 0$ 时, 显然上式不能恒成立,

所以 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a$ 是二次函数, 由于对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq 0$,

所以由二次函数的图象和性质可

得 $\begin{cases} a > 0, \\ \frac{1}{4} - 4a\left(\frac{1}{2} - a\right) \leq 0, \end{cases}$



$$\text{即} \begin{cases} a > 0, \\ a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} \leq 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a > 0, \\ (4a-1)^2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}.$$

$$(2) \text{ 因为 } a = c = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } g(x) = 4f(x) - mx = x^2 - (2+m)x + 1.$$

该函数图象开口向上, 且对称轴方程为

$$x = \frac{m+2}{2}.$$

假设存在实数 m , 使函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m+2]$ 上有最小值 -5 .

① 当 $\frac{m+2}{2} \leq m$, 即 $m \geq 2$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m+2]$ 上单调递增.

$$\text{所以 } g(m) = -5, \text{ 即 } m^2 - (2+m)m + 1 = -5.$$

解得 $m = 3$, 符合 $m \geq 2$.

② 当 $\frac{m+2}{2} \geq m+2$, 即 $m \leq -2$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $[m, m+2]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(m+2) = -5,$$

$$\text{即 } (m+2)^2 - (2+m)(m+2) + 1 = -5, \text{ 此方程无解.}$$

③ 当 $m < \frac{m+2}{2} < m+2$, 即 $-2 < m < 2$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(m, \frac{m+2}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{m+2}{2}, m+2)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g\left(\frac{m+2}{2}\right) = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 - (2+m)\frac{m+2}{2} + 1 = -5,$$

$$\text{解得 } m = -2 + 2\sqrt{6} \text{ 或 } m = -2 - 2\sqrt{6}.$$

其中 $-2 + 2\sqrt{6} > 2$, $-2 - 2\sqrt{6} < -2$, 均舍去.

综上所述, 存在实数 $m = 3$,

使函数 $g(x) = 4f(x) - mx$ 在区间 $[m, m+2]$ 上有最小值 -5 .

5. A 【解析】 令 $2x+1=t$, 因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [1, 3]$, $x = \frac{t-1}{2}$, 所以原不等式等价于

$$\frac{t^2-t+2}{2t} > a \text{ 在 } t \in [1, 3] \text{ 上恒成立.}$$

$$\text{令 } f(t) = \frac{t^2-t+2}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{2}{t} - 1 \right), f(t)$$

在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{2}, 3]$ 上单调

递增, 所以当 $t = \sqrt{2}$ 时, $f(t)_{\min} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, 若

$f(t) > a$ 在 $t \in [1, 3]$ 上恒成立, 则 $f(t)_{\min} > a$, 所以 $a < \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. 故选 A.

6. A 【解析】 令 $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 2]$,



$f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$;

令 $g(x) = x^2 - 2x, x \in [m, m+1]$, 对应图象的开口向上, 所以其最大值必在区间端点处取到,

所以要使 $\forall x_1 \in [1, 2], x_2 \in [m, m+1]$, 均有 $x_1^2 - 1 \geq x_2^2 - 2x_2$ 成立,

只需 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$,

所以 $\begin{cases} g(m) = m^2 - 2m \leq 0, \\ g(m+1) = (m+1)^2 - 2(m+1) \leq 0, \end{cases}$

解得 $0 \leq m \leq 1$.

故选 A.

7. $-\frac{1}{2}$ 【解析】已知 $f(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{x}, x \leq c, \\ x - x^2, c < x \leq 2, \end{cases}$$

若 $c > 0$, 则当 $0 < x \leq c$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} \in$

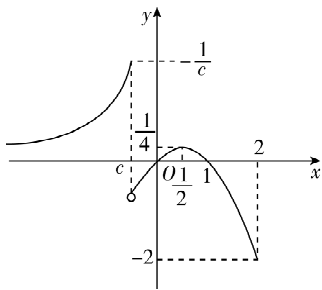
$(-\infty, -\frac{1}{c}]$, 不合题意.

若 $c = 0$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, 不合题意.

所以 $c < 0$, 当 $x \leq c$ 时, $0 < -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{c}$,

当 $c < x \leq 2$ 时, $f(x) = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, 图象开口向下, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = 2 - 4 = -2$,

作出 $f(x)$ 的大致图象如图.



因为 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$, 所以

$\begin{cases} -\frac{1}{c} = 2, \\ c - c^2 \geq -2, \end{cases}$ 解得 $c = -\frac{1}{2}$, 经检验, 符合题意.

8. 【解】(1) 对任意 $x \in (1, 2]$, $f(x) = x^2 + ax + 3 \geq a$ 恒成立, 则 $0 < x - 1 \leq 1$, $-a(x - 1) \leq x^2 + 3$,

令 $m = x - 1 \in (0, 1]$, 则 $x = m + 1$, 所以 $-am \leq (m + 1)^2 + 3 = m^2 + 4 + 2m$, 即 $-a \leq m + \frac{4}{m} + 2$.

令 $p(m) = m + \frac{4}{m} + 2$, 其中 $m \in (0, 1]$, 则函



数 $p(m)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 所以 $p(m)_{\min} = p(1) = 7$, 所以 $-a \leq 7$, 解得 $a \geq -7$.

因此, 实数 a 的取值范围是 $[-7, +\infty)$.

(2) 由题知 $g(x) = f(x) - (a-2)x + a = (x+1)^2 + a + 2 \geq a + 2$, 令 $t = g(x) \geq a + 2$,

则 $y = g(g(x)) = g(t) = (t+1)^2 + a + 2, t \geq a + 2, g(t)$ 为图象开口向上的二次函数, 对应的对称轴为直线 $t = -1$.

当 $a + 2 < -1$, 即 $a < -3$ 时, $g(t)$ 在 $[a + 2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $g(t) \geq g(-1) = a + 2 = 5$, 解得 $a = 3$, 不符合要求, 舍去;

当 $a + 2 \geq -1$, 即 $a \geq -3$ 时, $g(t)$ 在 $[a + 2, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $g(t) \geq g(a + 2) = a^2 + 7a + 11 = 5$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -6$ (舍去).

综上所述, $a = -1$.



综合上分

9. $\frac{1}{3}$



思路导引

根据题目得到 $a > 0$,

$b^2 - 4ac \leq 0 (b > a)$, 从而有 $c \geq \frac{b^2}{4a}$, 故

$$\frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{\frac{b}{a} - 1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}, \text{换元后结合基本}$$

不等式求出最值.

【解析】 $\because f(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore a > 0, b^2 - 4ac \leq 0 (b > a), \therefore a^2 < b^2 \leq 4ac, \therefore c \geq \frac{b^2}{4a}$,

$$\therefore \frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{b-a}{a+b+\frac{b^2}{4a}} = \frac{\frac{b}{a} - 1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}.$$

$$\text{令 } t = \frac{b}{a} - 1 > 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} = t + 1, \text{ 所以 } \frac{b-a}{a+b+c} \leq \frac{t}{1 + (t+1) + \frac{1}{4}(t+1)^2} = \frac{4t}{t^2 + 6t + 9} =$$

$$\frac{4}{t + \frac{9}{t} + 6} \leq \frac{4}{2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}} + 6} = \frac{1}{3}, \text{ 当且仅当 } t = \frac{9}{t}, \text{ 即 } t = 3, \frac{b}{a} = 4 \text{ 时, 等号成立.}$$

故 $\frac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

3.2.2 奇偶性



基础上分

1. AC 【解析】根据函数奇偶性的定义和性质可得, 图象关于坐标原点对称的函数 f



(x) 满足 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 即 **A 正确**;

图象关于 y 轴对称的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 即 **C 正确**;

奇函数可能在原点处没有定义, 例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 但其图象不过坐标原点, 即 **B 错误**;

函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 为偶函数, 但其图象与 y 轴不相交, 所以 **D 错误**.

故选 AC.

2. A 【解析】对于 A, $f(-x) = (-x)^4 - 1 = x^4 - 1 = f(x)$, 且定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 为偶函数, 故 **A 正确**;

对于 B, 定义域不关于原点对称, 则 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 故 **B 错误**;

对于 C, $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$, 且函数定义域 $\{x | x \neq 0\}$ 关于原点对称, 则 $f(x)$ 为奇函数, 故 **C 错误**;

对于 D, $f(x) = x^3, x \neq 0, f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 且定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(x)$ 为奇函数, 故 **D 错误**.

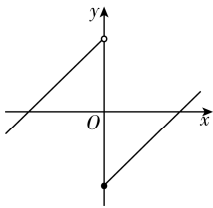
易错警示 在判断函数的奇偶性时, 务必遵守定义域优先的原则, 在定义域关于原点对称的前提下判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系, 另外, 确定函数定义域之前不要化简函数解析式, 否则可能会导致定义域发生变化.

3. C 【解析】当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 + 1$, $f(-x) = x^2 + 1 = f(x)$ 且定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 为偶函数.

当 $f(x)$ 是偶函数时, 由 $f(x) = f(-x)$, 得 $x^2 + (a-2)x + 1 = x^2 - (a-2)x + 1$ 恒成立, 可得 $2(a-2)x = 0$ 恒成立, 即 $a = 2$.

所以“ $a = 2$ ”是“ $f(x)$ 是偶函数”的充要条件, 故选 C.

4. C 【解析】作出函数图象如图所示.



由于 $f(0) = -3$, 所以函数图象不关于原点对称,

由图可知函数图象不关于 y 轴对称, 故 $f(x)$ 既非奇函数也非偶函数,

故选 C.

**方法总结** 判断分段函数奇偶性的口

诀为“先判定义域,再分段观察”.

(1)先判定义域:首先判断函数的定义域是否关于原点对称,如果定义域不关于原点对称,那么该函数就是非奇非偶函数;

(2)再分段观察:如果定义域关于原点对称,那么需要分段研究每一个区间的函数的性质,从而判断整个分段函数的奇偶性.

5.【解】(1) \because 函数 $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ 的定义域为

$\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 1\}$, 定义域不关于原点对称,

\therefore 该函数既不是奇函数也不是偶函数.

(2)方法一(定义法):函数 $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称.

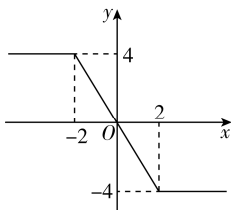
$$\because f(-x) = |-x - 2| - |-x + 2| = |x + 2| - |x - 2| = -(|x - 2| - |x + 2|) = -f(x),$$

\therefore 函数 $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$ 是奇函数.

方法二(根据图象进行判断):

$$f(x) = |x - 2| - |x + 2| = \begin{cases} -4, & x \geq 2, \\ -2x, & -2 < x < 2, \\ 4, & x \leq -2, \end{cases}$$

画出图象如图所示, 图象关于原点对称, 因此函数 $f(x)$ 是奇函数.



(3) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2$ 为偶函数.

当 $a \neq 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (x \neq 0)$,

取 $x = \pm 1$, 得 $f(-1) + f(1) = 2 \neq 0$, $f(-1) - f(1) = -2a \neq 0$, 即 $f(-1) \neq -f(1)$, $f(-1) \neq f(1)$,

\therefore 函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

综上所述, 当 $a \neq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数;

当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称.

方法一:

$$\because f(-x) + f(x)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x - 1}{\sqrt{1+x^2} - x + 1} + \frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{\sqrt{1+x^2} + x + 1}$$

$$= \frac{-2x + 2x}{(\sqrt{1+x^2} - x + 1)(\sqrt{1+x^2} + x + 1)}$$

$$= 0,$$



$\therefore f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数.

方法二:

当 $x=0$ 时, $f(0)=0$;

当 x 逐渐增大时, $\sqrt{1+x^2}$ 与 x 均逐渐增

大, 故当 $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 此时 $\frac{f(-x)}{f(x)} =$

$$\frac{(\sqrt{1+x^2}-x-1)(\sqrt{1+x^2}+x+1)}{(\sqrt{1+x^2}-x+1)(\sqrt{1+x^2}+x-1)} =$$

$$\frac{(1+x^2)-(x+1)^2}{(1+x^2)-(x-1)^2} = \frac{-2x}{2x} = -1,$$

即 $f(-x) = -f(x)$.

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

- 6. B** 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 3$, 所以 $f(-2) = -f(2) = -(4-3) = -1$, 故选 B.

提示: 求 $f(a)$ 的值, 根据函数的奇偶性, 可先求出 a 的相反数的函数值 $f(-a)$

一题多解

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 3$, 结合函数为奇函数知 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $-f(x) = x^2 - 3$, 即 $f(x) = -x^2 + 3 (x < 0)$, 则 $f(-2) = -2^2 + 3 = -1$, 故选 B.

- 7. D** 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[a-2, 3a]$ 上的偶函数,

提示: 具有奇偶性的函数具有双对称性, 即定义域关于原点对称, 图象关于原点或 y 轴对称

所以 $a-2+3a=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2}$

$x^2 + bx$, 其图象的对称轴为直线 $x =$

$$-\frac{b}{2 \times \frac{1}{2}} = -b, \text{ 所以 } -b=0, \text{ 即 } b=0, \text{ 所以 } a+$$

$$b = \frac{1}{2}. \text{ 故选 D.}$$

- 8. A** 【解析】根据题意, 设 $g(x) = f(x) - a = x^3 + 2x$, 则 $g(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -(x^3 + 2x) = -g(x)$, 又因为 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $g(x)$ 是奇函数, 即 $g(x) + g(-x) = 0$, 故 $f(x) - a + f(-x) - a = 0$, 即 $f(x) + f(-x) = 2a$.

因为 $f(m) + f(-m) = 2$, 所以 $2a = 2$, 解得 $a = 1$, 则 $f(x) = x^3 + 2x + 1$. 故 $f(a) = f(1) = 1^3 + 2 \times 1 + 1 = 4$, 故 A 正确.

- 9. -1** 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $|-x-1| + |-x-a| = |x-1| + |x-a|$, 所以 $|x+1| + |x+a| = |x-1| + |x-a|$ 恒成立, 所以 $a = -1$.

- 10. BC** 【解析】 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 在

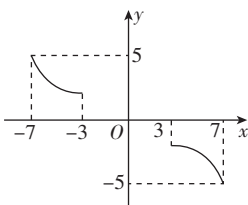


关于原点对称的区间内的单调性相同,
 $\therefore f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上也单调递减.

又 $\because f(x)$ 的图象关于原点对称, $f(-7) = 5$, $\therefore f(7) = -f(-7) = -5$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上的最小值为 -5 . 故 BC 正确.

快解

由题意画出符合条件的函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知函数 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上单调递减, 且最小值为 -5 .



11. 【解】(1) 由奇函数的定义域关于原点对称, 知 $a=1$, 又 $f(0)=0$, 所以 $a+b=0$, 所以 $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

(2) $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上单调递减.

证明: 设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2-1}$

$$- \frac{x_2}{x_2^2-1} = - \frac{(x_1 x_2 + 1)(x_1 - x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}.$$

又由 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 知 $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 x_2 + 1 > 0$, $x_1^2 - 1 < 0$, $x_2^2 - 1 < 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.

(3) $f\left(\frac{1}{t}\right) + f\left(1 - \frac{t}{2}\right) < 0$, 即 $f\left(\frac{1}{t}\right) < -f\left(1 - \frac{t}{2}\right)$, 因为 $f(x)$ 是定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数, 所以 $f\left(\frac{1}{t}\right) < f\left(\frac{t}{2} - 1\right)$, 又函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } \begin{cases} -1 < \frac{1}{t} < 1, \\ -1 < 1 - \frac{t}{2} < 1, \text{ 解得 } 1 < t < 1 + \sqrt{3}, \text{ 所} \\ \frac{1}{t} > \frac{t}{2} - 1, \end{cases}$$

以不等式的解集为 $\{t \mid 1 < t < 1 + \sqrt{3}\}$.

**对点上分**

1. D 【解析】 函数 $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-x^2}$,

令 $\begin{cases} x^2-4 \geq 0, \\ 4-x^2 \geq 0, \end{cases}$ 得 $x^2=4$, 因此函数 $f(x)$ 的定

义域为 $\{-2, 2\}$, 关于原点对称. 此时 $f(x) = 0$, 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 而函数 $h(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$ 的定义域为 $\{4\}$, 不关于原点对称, 因此函数 $h(x)$ 是非奇非偶函数. 故选 D.



- 2. A** 【解析】根据题意, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} . 在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中, 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$, 即 $f(0)=0$.

→ **关键点** 利用赋值法求出 $f(0)$ 的值是解决问题的关键

令 $y=-x$, 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 则有 $f(-x)=-f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是奇函数. 故 **A 正确**.

方法总结 判断抽象函数的奇偶性的方法

首先明确题干中给出的抽象函数满足的条件, 通常是关于函数 $f(x), f(y), f(x \pm y)$ 等的一个等式, 求解时通常令一个字母为 x , 另一个字母为 $-x$, 凑出 $f(x), f(-x)$ 的关系, 有时还要令两个字母均为 0, 求得 $f(0)$ 的相关关系式或取值.

- 3. BD** 【解析】对于 A 选项, 设 $m(x)=f(x)+g(x)$, 则该函数的定义域为 \mathbf{R} ,
 $m(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x) \neq -m(x)$,
 所以函数 $f(x)+g(x)$ 不是奇函数, 故 **A 错误**;

对于 B 选项, 令 $n(x)=|f(x)|+g(x)$, 则该函数的定义域为 \mathbf{R} ,

$$n(-x)=|f(-x)|+g(-x)=|-f(x)|+g(x)=|f(x)|+g(x)=n(x),$$

所以函数 $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数, 故 **B 正确**;

对于 C 选项, 令 $p(x)=f(x) \cdot |g(x)|$, 则该函数的定义域为 \mathbf{R} ,

$$p(-x)=f(-x) \cdot |g(-x)|=-f(x) \cdot |g(x)|=-p(x),$$

所以函数 $f(x) \cdot |g(x)|$ 为奇函数, 故 **C 错误**;

对于 D 选项, 令 $q(x)=|f(x) \cdot g(x)|$, 则该函数的定义域为 \mathbf{R} ,

$$q(-x)=|f(-x) \cdot g(-x)|=|-f(x) \cdot g(x)|=|f(x) \cdot g(x)|=q(x),$$

所以 $|f(x) \cdot g(x)|$ 是偶函数, 故 **D 正确**.
 故选 **BD**.

- 4. C** 【解析】由题可知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{且 } f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x),$$

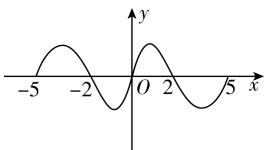
所以 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 排除 A, B. 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 排除 D. 故选 **C**.

- 5. A** 【解析】因为 $g(x)=f(2x)+x^2$ 为奇函数, 所以 $g(x)+g(-x)=f(2x)+x^2+f(-2x)+(-x)^2=f(2x)+f(-2x)+2x^2=0$,
 令 $x=1$, 得 $f(2)+f(-2)+2 \times 1^2=0$, 所以



$f(-2) = -2 - f(2) = -2 - 2 = -4$. 故选 A.

6. D 【解析】根据奇函数图象的特点补全函数 $f(x)$ 的图象, 如图, 根据图象可得使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值集合为 $(-2, 0) \cup (2, 5)$. 故 D 正确.



一题多解 由题图可得, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \in (2, 5)$ 时, $f(x) < 0$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$. 所以当 $x \in (-2, 0)$ 时, $-x \in (0, 2)$, 故 $f(x) = -f(-x) < 0$; 当 $x \in (-5, -2)$ 时, $-x \in (2, 5)$, 故 $f(x) = -f(-x) > 0$. 综上, 使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值集合为 $(-2, 0) \cup (2, 5)$.

7. A 【解析】函数 $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-|a-x|}$ 为偶函

数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $\frac{\sqrt{25-x^2}}{-x-|a+x|} =$

$\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-|a-x|}$, $y = \sqrt{25-x^2}$ 的定义域为 $[-5,$

$5]$, 在 $[-5, 5]$ 或其子集上 $x-|a-x| = -x-|a+x|$, 即 $2x = |a-x| - |a+x|$, 所以

$\begin{cases} a-x \leq 0, \\ a+x \leq 0 \end{cases}$ 恒成立, 所以 $\begin{cases} a \leq (-x)_{\min}, \\ a \leq x_{\min}, \end{cases}$ 又

$-5 \leq x \leq 5$, 可得 $a \leq -5$. 经检验, 此时 $f(x)$ 的定义域关于原点对称. 故选 A.

方法总结 由函数奇偶性求参数的两种常见方法:

(1) 方程法: 根据奇函数或偶函数的定义来列出等式, 对于奇函数, 有 $f(-x) = -f(x)$, 对于偶函数, 有 $f(-x) = f(x)$, 代入函数解析式, 可以求得参数的值;

(2) 特殊化策略: 根据定义域内关于原点对称的特殊自变量值所对应的函数值关系来列方程求解, 但需要注意的是, 这种方法求出的参数值需要代入函数解析式进行检验, 看是否满足条件, 不满足的要舍去.

8. C 【解析】设 $g(x) = \frac{a}{x} + bx$ ($a > 0, b > 0$),

$f(x) = g(x) + 5$, 则 $g(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 3. $\therefore g(x)$ 为奇函数, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最大值为 -3, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有最大值 2, 故 C 正确.

9. B 【解析】设 $F(x) = xf(x)$, 由 $f(x)$ 是定



义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 知 $F(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -F(x)$, 所以 $F(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

由题意, 若 $\forall a, b \in [0, +\infty)$, 且 $a \neq b$, 都有 $\frac{F(a)-F(b)}{a-b} < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$

上单调递减, 又 $F(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $F(x)$ 的图象关于原点对称, 则 $F(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数.

由不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right) - (t^2 - 2t)f(t-2) > 0$, 可知 $t \neq 0$.

①当 $t > 0$ 时, 不等式可化为 $\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) - (t-2)f(t-2) > 0$, 即 $F\left(\frac{1}{t}\right) > F(t-2)$, 故 $\frac{1}{t} < t-2$, 由 $t > 0$, 得 $t^2 - 2t - 1 > 0$, 解得 $t < 1 - \sqrt{2}$ (舍) 或 $t > 1 + \sqrt{2}$;

②当 $t < 0$ 时, 不等式可化为 $\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right) - (t-2)f(t-2) < 0$, 即 $F\left(\frac{1}{t}\right) < F(t-2)$, 故 $\frac{1}{t} > t-2$, 由 $t < 0$, 得 $t^2 - 2t - 1 > 0$, 解得 $t < 1 - \sqrt{2}$ 或 $t > 1 + \sqrt{2}$ (舍).

综上所述, 不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right) - (t^2 - 2t)f(t-2) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. 故选 B.

10.9 【解析】由题意知, $f(x) = f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$.

因为 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + x + 8$ ①,

所以 $f(-x) - g(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 8$, 即 $f(x) + g(x) = -x^3 + x^2 - x + 8$ ②,

联立①②解得 $f(x) = x^2 + 8$, $g(x) = -x^3 - x$, 所以 $f(1) = 1^2 + 8 = 9$.

11.4 【解析】 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则有 $f(-x) = -f(x)$,

$$g(x) = \frac{2(x+4)^2 + f(x)}{x^2 + 16} = \frac{2x^2 + 16x + 32 + f(x)}{x^2 + 16} = 2 + \frac{16x + f(x)}{x^2 + 16}.$$

设 $h(x) = g(x) - 2 = \frac{16x + f(x)}{x^2 + 16}$, 函数 $h(x)$

的定义域为 \mathbf{R} , $h(-x) = \frac{16(-x) + f(-x)}{(-x)^2 + 16} =$

$$\frac{-16x - f(x)}{x^2 + 16} = -\frac{16x + f(x)}{x^2 + 16} = -h(x), \text{ 所以}$$

$h(x)$ 为奇函数, 则有 $h(x)_{\max} + h(x)_{\min} = 0$, 即 $M - 2 + m - 2 = 0$, 所以 $M + m = 4$.

12. 【证明】(1) 取 $x = y = 1$ 代入 $f(x) + f(y) = f(xy)$, 得 $f(1) = 0$.

取 $y = \frac{1}{x}$ 代入 $f(x) + f(y) = f(xy)$, 得



$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

(2) 取 $y = -1$ 代入 $f(x) + f(y) = f(xy)$, 得 $f(x) + f(-1) = f(-x)$,

取 $x = y = -1$ 代入 $f(x) + f(y) = f(xy)$, $f(-1) + f(-1) = f(1)$, 所以 $f(-1) = 0$,
所以 $f(x) = f(-x)$,

提示: 利用赋值法判断抽象函数的奇偶性, 通常将其中一个字母赋值为 $-x$, 由此可得到 $f(x), f(-x)$ 间的关系

又 $f(x)$ 的定义域 $\{x | x \neq 0\}$ 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 则 $\frac{x_2}{x_1} > 1$,

由题设知 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f\left(\frac{1}{x_1}\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0,$$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

提示: 利用赋值法判断抽象函数的单调性, 通常根据已知等式构造出 $f(x_2) - f(x_1)$, 根据条件中的不等式关系, 判断出 $f(x_2) - f(x_1)$ 的符号

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x_2) > f(-x_1)$, 而 $-x_1, -x_2 \in (-\infty, 0)$, $-x_1 > -x_2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

13. D



思路导引 根据题干中“ $f(1-x) = -f(3+x)$ ”, 可得 $f(1-x) + f(3+x) = 0$, 可以运用对称性快速求解.

【解析】 因为 $f(1-x) = -f(3+x)$, 所以 $f(2-x) = -f(2+x)$. 令 $g(x) = f(2+x)$, 由已知可得 $g(-x) = f(2-x) = -f(2+x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 即函数 $f(2+x)$ 的图象关于原点对称, 故 D 正确.

快解

若 $f(1-x) = -f(3+x)$ 恒成立, 则 $f(1-x) + f(3+x) = 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度得到 $f(x+2)$ 的图象, 故 $f(x+2)$ 的图象关于原点对称.

14. B **【解析】** 因为 $f(2+x) = f(-x)$, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所以 $f(2) = f(0)$, 又当 $x \leq 1$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减.

因为 $-1 < 0 < 1$, 所以 $f(1) < f(0) < f(-1)$, 即 $f(1) < f(2) < f(-1)$. 故选 B.



15. BCD 【解析】因为 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(-x) = -g(x)$, 即 $(-x+2)f(-x) = -(x+2)f(x)$,

因为 $h(x)$ 为偶函数, 所以 $h(-x) = h(x)$, 即 $f(-x) + 2x = f(x) - 2x$,

联立 $\begin{cases} (-x+2)f(-x) = -(x+2)f(x), \\ f(-x) + 2x = f(x) - 2x, \end{cases}$ 解得

$$f(x) = -x^2 + 2x.$$

对于 A, $f(1) = -1^2 + 2 = 1$, 故 A 错误;

对于 B, $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $x=1$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 由 $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ 可得 $f(x) \leq f(1) = 1$, 即函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 当且仅当 $x=1$ 时取得最大值, 故 D 正确.

16. AB 【解析】对于 A, 因为 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 所以 $f(x+1) + 2 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 2 = x^3 - 3x$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, -2)$ 对称, 故 A 正确;

对于 B, $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = (x-1)^4 - 1$, $f(x+1) = (x+1-1)^4 - 1 = x^4 - 1$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 B 正确;

对于 C, 由反比例函数的性质可知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 故 C 错误;

对于 D, $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$, $f(x-2) = \frac{x-4}{(x-4)^2+1}$ 不是奇函数, 故 D 错误. 故选 AB.

17. ①②③④ 【解析】对于①, 若 $y=f(x+1)$ 为偶函数, 则其函数图象关于直线 $x=0$ 对称, 又 $y=f(x+1)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得 $f(x)$ 的图象, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 正确;

对于②, $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度可得 $f(x-1)$ 的图象, 将 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称得 $f(-x)$ 的图象, 然后将其图象向右平移 1 个单位长度得 $f(1-x)$ 的图象, 故 $f(x-1)$ 与 $f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故正确;

对于③, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 故 $f(x+1) = f(1-x)$, 所以 f



(x) 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故正确;

对于④, 因为 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) = f(-x-2)$, 所以 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故正确.

- 18. 12 【解析】** 因为函数 $y=f(x)-2$ 为奇函数, 故函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(0, 2)$ 对称, 又 $g(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x} + 2$, 其图象也关于点 $(0, 2)$ 对称, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点关于点 $(0, 2)$ 对称, 则 $y_1 + y_2 + \cdots + y_6 = 3 \times 4 = 12$.



综合上分

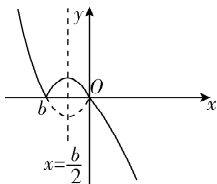
- 19. 0 【解析】** $\because f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $\therefore f(-2) = f(2)$,
 \because 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+4) - f(x) = 2f(2)$,
 令 $x = -2$, 则 $f(2) = f(-2) + 2f(2)$,
 $\therefore f(2) = 0, \therefore f(x+4) = f(x)$,
 $\therefore f(2026) = f(2022) = \cdots = f(6) = f(2) = 0$.

3.2 节测上分

- 1. D 【解析】** $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 3}{x} = x^3 - 2 + \frac{3}{x}$, 令
 $g(x) = f(x) + 2 = x^3 + \frac{3}{x} (x \neq 0)$,
 $\therefore g(-x) = (-x)^3 + \frac{3}{-x} = -x^3 - \frac{3}{x} = -g(x)$,
 $\therefore g(x)$ 为奇函数.
 当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) \geq 2$, 则 $g(x) \geq 4$,
 \therefore 当 $x \in [-b, -a]$ 时, $g(x) = f(x) + 2 \leq -4$,
 $\therefore f(x) \leq -6$. 故选 D.

- 2. B 【解析】** $f(x) = -x|x-b| = \begin{cases} -x^2 + bx, & x \geq b, \\ x^2 - bx, & x < b. \end{cases}$ 令 $f(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = b$.

①若 $b < 0$, 作出 $f(x)$ 的图象如图①所示, 由图可知, 函数 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递减, 不符合题意;



图①

②若 $b = 0$, 则 $f(x) = -x|x| = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ 为

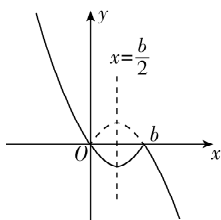
\mathbf{R} 上的减函数, 不符合题意;

③若 $b > 0$, 作出 $f(x)$ 的图象如图②所示, 由图可得 $f(x)$ 在 $[b, +\infty)$ 上单调递减, 在



$\left(-\infty, \frac{b}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{b}{2}, b\right]$ 上单调递增, 若 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增, 则 $\frac{b}{2} \leq 2 < 3 \leq b$, 解得 $3 \leq b \leq 4$.

故 B 正确.



图②

一题多解

函数 $f(x) = -x|x-b|$

$$b| = \begin{cases} -x^2 + bx, & x \geq b, \\ x^2 - bx, & x < b. \end{cases}$$

由于 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增, 所以 $f(2) < f(3)$, 故 $2|2-b| > 3|3-b|$, 平方并整理后可得 $5b^2 - 38b + 65 < 0$, 解得 $\frac{13}{5} < b < 5$.

当 $x \geq b$ 时, 函数 $f(x) = -x^2 + bx$, 图象开口向下, 关于直线 $x = \frac{b}{2}$ 对称, 由于 $b > \frac{b}{2}$, 所以 $f(x)$ 在 $[b, +\infty)$ 上单调递减; 当 $x < b$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - bx$, 图象开口向上, 关于直线 $x = \frac{b}{2}$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{b}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{b}{2}, b\right]$ 上单调递增.

若 $f(x) = -x|x-b|$ 在区间 $[2, 3]$ 上单调递增, 则有 $\begin{cases} \frac{b}{2} \leq 2, \\ b \geq 3, \end{cases}$ 解得 $3 \leq b \leq 4$,

故选 B.

- 3. AC** 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(f(-x)) = f(f(x))$, $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$, 所以 $f(f(x))$ 和 $f(g(x))$ 均为偶函数, **A 正确, B 错误**;
- 又因为 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 所以, 由复合函数的单调性可知, $g(g(x))$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $g(f(x))$ 在 $[0, +$



∞) 上单调递减, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.

4. B 【解析】由条件得 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{x_2 - x_1} > 0,$$

提示: 通过不等式两边同时除以 $x_1 x_2$ 转化函数结构

$\therefore \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由 $f(a^2 + 2a) > 2a^2 + 4a$, 得 $a^2 + 2a > 0$, 且

$$\frac{f(a^2 + 2a)}{a^2 + 2a} > 2 = \frac{f(3)}{3}, \text{ 则 } \begin{cases} a^2 + 2a > 0, \\ a^2 + 2a > 3, \end{cases} \text{ 解得}$$

$a < -3$ 或 $a > 1$, 故选 B.

5. ABD 【解析】由题意得 $f(0) = 3$,

$$f(f(0)) = f(3) = 9 - 6a + 2a = 0, \text{ 解得 } a =$$

$\frac{9}{4}$, A 正确.

若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则

$$\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{2a}{2 \times 1} \leq 2, \\ 2a + 3 \leq 4 - 4a + 2a, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a \leq \frac{1}{4}, \text{ B}$$

正确.

若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减, 则

$$\begin{cases} a < 0, \\ -\frac{2a}{2 \times 1} \geq 3, \\ 2a + 3 \geq 4 - 4a + 2a, \end{cases} \text{ 不等式组无解, C}$$

错误.

若 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则 $a > 0$, 得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增.

当 $0 < a \leq 2$ 时, 要使 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 则需

$$\text{满足 } 2a + 3 \geq 4 - 4a + 2a, \text{ 得 } a \geq \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{1}{4} \leq$$

$a \leq 2$.

当 $a > 2$ 时, 函数 $y = x^2 - 2ax + 2a$ 在 $(2, a)$ 上

单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则要使

$f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 需满足 $2a + 3 \geq a^2 - 2a^2 +$

$2a$, 化简得 $a^2 + 3 \geq 0$, 此不等式恒成立, 故

$a > 2$.

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, D 正

确. 故选 ABD.

6. 点 $(-1, 1)$ 【解析】由题意可知函数 $f(x -$

$1)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称, 因为函数 f

(x) 的图象由函数 $f(x - 1)$ 的图象向左平

移 1 个单位长度得到, 所以函数 $f(x)$ 的图

象关于点 $(-1, 0)$ 对称. 函数 $f(x) + 1$ 的图

象由 $f(x)$ 的图象向上平移 1 个单位长度

得到, 所以函数 $f(x) + 1$ 的图象关于点 $(-$



1,1) 对称.

易错警示 弄错图象平移的方向或单位长度而致错

在进行图象平移时,要明确平移的方向(如向左、向右、向上、向下)和距离,确保图象在平移后形状不变;同时准确找到平移前后的对应点.确定平移的距离和方向时,可以借助平行线法、对应点连线法等方法.

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为 $\forall x \in (0, +\infty)$,

$$\left(\frac{1}{x} - a\right)(x^2 - ax - 1) \leq 0, \text{ 即 } \left(\frac{1}{x} - a\right)\left(x - a - \frac{1}{x}\right) \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

且 $y_1 = \frac{1}{x} - a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y_1 \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y_1 \rightarrow -a$,

$y_2 = x - a - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y_2 \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y_2 \rightarrow +\infty$,

所以若要满足不等式恒成立, 则函数 y_1 , y_2 的图象必须交于 x 轴正半轴上一点, 否则必存在 $x_0 > 0$, 使得

$$\left(\frac{1}{x_0} - a\right)\left(x_0 - a - \frac{1}{x_0}\right) > 0, \text{ 所以当 } \frac{1}{x} - a = 0, \text{ 即 } x = \frac{1}{a} \text{ 时, } x - a - \frac{1}{x} = 0 \text{ 也成立, 所以 } \frac{1}{a} - 2a = 0 \text{ 且 } a > 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. (1) 【证明】令 $x = y = 0$, 则有 $f(0) + f(0) = f(0)$, $\therefore f(0) = 0$,

$$\text{令 } y = -x, \text{ 则有 } f(x) + f(-x) = f\left(\frac{x-x}{1-x^2}\right) = f(0) = 0,$$

$\therefore f(-x) = -f(x)$, $x \in (-1, 1)$, \therefore 函数 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \text{【证明】设 } -1 < x_1 < x_2 < 1, \text{ 则 } -x_1 \in (-1, 1), f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f\left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}\right).$$

因为 $x_2 - x_1 > 0$, $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, 所以

$$|x_1 x_2| < 1, \text{ 即 } -1 < x_1 x_2 < 1, \text{ 则 } \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} > 0,$$

$$\text{又 } \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} - 1 = \frac{(1 + x_1)(x_2 - 1)}{1 - x_1 x_2} < 0, \text{ 所以 } 0 <$$

$$\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} < 1, \text{ 所以 } f\left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}\right) < 0,$$

所以 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减.



(3)【解】由(1)(2)知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 且为奇函数,

所以当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$,

所以 $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \forall a \in [-1, 1], f(x) \geq -t^2 + 4at - 4$ 恒成立等价于 $\forall a \in [-1, 1], -t^2 + 4at - 4 \leq -1$ 恒成立, 即 $\forall a \in [-1, 1], 4ta - t^2 - 3 \leq 0$ 恒成立.

设 $g(a) = 4ta - t^2 - 3, a \in [-1, 1]$, 则

$$\begin{cases} g(-1) \leq 0, \\ g(1) \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -t^2 - 4t - 3 \leq 0, \\ -t^2 + 4t - 3 \leq 0, \end{cases}$$

提示: 因为函数 $g(a) = 4ta - t^2 - 3, a \in [-1, 1]$, 要么是一次函数, 要么是常函数, 所以要使 $4ta - t^2 - 3 \leq 0$, 只需在端点处的函数值均不大于 0 即可

$$\text{则 } \begin{cases} t \leq -3 \text{ 或 } t \geq -1, \\ t \leq 1 \text{ 或 } t \geq 3, \end{cases}$$

则实数 t 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$.

专题上分 3 函数的性质及应用

1. D 【解析】当 $a+5 > 1$, 即 $a > -4$ 时, 由 $f(a+5) = -1$, 得 $\frac{6}{a+5+1} - 2 = -1$, 即 $a+6 = 6$, 解得 $a = 0$;

当 $a+5 \leq 1$, 即 $a \leq -4$ 时, 由 $f(a+5) = -1$, 得 $1 - (a+5) = -1$, 解得 $a = -3$ (舍去).

所以 $a = 0$, 则 $f(a) = f(0) = 1 - 0 = 1$. 故 D 正确.

2. A 【解析】当 $f(2m) \leq 1$ 时, 由 $1 - [f(2m)]^2 \geq 0$ 得 $-1 \leq f(2m) \leq 1$.

若 $2m \leq 1$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $-1 \leq f(2m) \leq 1$ 得 $-1 \leq 1 - 4m^2 \leq 1$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$;

若 $2m > 1$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 由 $-1 \leq f(2m) \leq 1$ 得 $-1 \leq |2m - 2| - 1 \leq 1$, 解得 $\frac{1}{2} < m \leq 2$.

故当 $f(2m) \leq 1$ 时, 由 $f(f(2m)) \geq 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 2$.

当 $f(2m) > 1$ 时, 由 $|f(2m) - 2| - 1 \geq 0$ 得 $f(2m) \geq 3$.

若 $2m \leq 1$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 由 $f(2m) \geq 3$ 得 $1 - 4m^2 \geq 3$, 即 $m^2 \leq -\frac{1}{2}$, 显然无解;



若 $2m > 1$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 由 $f(2m) \geq 3$ 得

$|2m-2|-1 \geq 3$, 解得 $m \geq 3$.

故当 $f(2m) > 1$ 时, 由 $f(f(2m)) \geq 0$, 解得 $m \geq 3$.

综上, 实数 m 的取值范围是

$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$. 故选 A.

3. BD 【解析】设任意的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且

$$x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1}{x_1^2+1} - \frac{2x_2}{x_2^2+1} =$$

$$\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}, \text{ 因为 } 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1,$$

$x_1 - x_2 < 0, 1 - x_1x_2 > 0, (x_1^2+1)(x_2^2+1) > 0$, 故 f

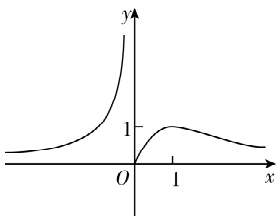
$(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(x)$

在 $[0, 1]$ 上单调递增, 同理可证 $f(x)$ 在

$(1, +\infty)$ 上单调递减. 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$,

$y = -\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 作出 $f(x)$

的大致图象如图所示.



对于 A, B, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x)$ 单调递

增, $f(x) \in (0, +\infty)$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, f

(x) 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单

调递减, 故当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \in [0,$

$1]$.

综上, $f(x)$ 的最小值为 0, 无最大值, 故 A

错误, B 正确.

对于 C, 方程 $f(x) - t = 0$ 有一个实根等价

于 $y = f(x)$ 与 $y = t$ 的图象有一个公共点, 则

实数 t 的取值范围是 $\{0\} \cup (1, +\infty)$, 故 C

错误.

对于 D, 设 $f(x) = t$, 方程 $g(f(x)) = 1$ 等价

于 $\begin{cases} f(x) = t \text{ ①,} \\ g(t) = 1 \text{ ②,} \end{cases}$ 当 $t \in \{0\} \cup (1, +\infty)$ 时, 方

程①有一解; 当 $t = 1$ 时, 方程①有两解; 当

$t \in (0, 1)$ 时, 方程①有三解. 由 $g(t) = 1$ 得

$t^2 + 2mt + 2 = 0$, 则 $g(f(x)) = 1$ 有四个不等

实根等价于 $t^2 + 2mt + 2 = 0$ 有两根 t_1, t_2 , 其

中 $t_1 \in (0, 1), t_2 \in \{0\} \cup (1, +\infty)$.

令 $h(t) = t^2 + 2mt + 2$, 因为 $h(0) = 2 > 0$, 所以

$t_2 \in (1, +\infty)$, 所以只需 $h(1) = 2m + 3 < 0$,

即 $m < -\frac{3}{2}$ 即可.

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, 故 D 正



确. 故选 BD.

4. C 【解析】不妨设 $x_1 < x_2$, \therefore 当 $2 \leq x_1 < x_2$ 时, $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$ 恒成立,
 $\therefore f(x_1) > f(x_2)$,
 \therefore 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减.
 \therefore 函数 $f(x+2)$ 是偶函数,
 \therefore 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,
 $\therefore a=f(1)=f(3), c=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)$.
 又函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) > f(3) > f\left(\frac{9}{2}\right)$,
 即 $f\left(\frac{5}{2}\right) > f(1) > f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\therefore b > a > c$,

故选 C.

5. A 【解析】依题意, 得 $(a-1)^3 + (b-1)^3 \geq 3(2-a-b) = 3(1-a) + 3(1-b)$, 即 $(a-1)^3 + 3(a-1) \geq (1-b)^3 + 3(1-b)$.

→ **关键点** 将不等式两边转化为具有相同结构的形式

设 $f(x) = x^3 + 3x$, 易知 $f(x)$ 是奇函数且 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以原不等式可化为 $f(a-1) \geq f(1-b)$, 即 $a-1 \geq 1-b$, $a+b \geq 2$.

因为 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq \frac{2^2}{2} = 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时, 等号成立, 所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 2. 故 A 正确.

6. ABD 【解析】对于 A, $\because \forall x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, \therefore 令 $x=y=0$, 可得 $f(0) = 2f(0) - 1$, $\therefore f(0) = 1$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $y=x$, 可得 $f(2x) = 2f(x) - 1$, 令 $y=2x$, 可得 $f(3x) = f(x) + f(2x) - 1 = 3f(x) - 2$, 同理可得 $f(4x) = 4f(x) - 3$, $f(5x) = 5f(x) - 4$, $f(6x) = 6f(x) - 5$, 故 B 正确;

对于 C, 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $\therefore f(x_2 - x_1) < 1$, $\therefore f(x_2) = f(x_2 - x_1 + x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - 1 < 1 + f(x_1) - 1 = f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $\therefore f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的最大值为 $f(-4)$, 在 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ 中, 令 $y=-x$, 可得 $f(0) = f(x) + f(-x) - 1 = 1$, 又 $f(4x) = 4f(x) - 3$, $\therefore f(-4) = 2 - f(4) = 2 - [4f(1) - 3] = 2 - [4 \times (-2) - 3] = 13$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的最大值为 13, 故 C 错误;

对于 D, $\because f(2x^2) \geq f(3x) + 2f(x) + 4 = 3f(x) + 2f(x) + 2 = 5f(x) - 4 + 6 = f(5x) + 6 = f(5x) - 1 + 7$, $\because f(2) = 2f(1) - 1 = -5$, $f(-2) + f(2) = 2$, $\therefore f(-2) = -f(2) + 2 = 7$,



$\therefore f(2x^2) \geq f(5x) + f(-2) - 1 = f(5x-2)$, 又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $\therefore 2x^2 \leq 5x-2$, 解得

$x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 故 D 正确. 故选 ABD.

7. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$



思路导引

利用偶函数的性质可以得到 $f(|1-3a|) < f(|2a-1|)$, 再利用 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上的单调性可得 a 满足的不等式组, 其解集即为所求.

【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的偶函数, $\therefore f(1-3a) < f(2a-1)$ 等价于 $f(|1-3a|) < f(|2a-1|)$,

又 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} |1-3a| > |2a-1|, \\ -1 < 1-3a < 1, \\ -1 < 2a-1 < 1, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{2}{5} < a < \frac{2}{3}.$$

8. (1) **【解】**由 $f(x)$ 为奇函数, 且定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

可得 $f(-1) = -f(1)$, 即 $-(a-b+1) = -(a+b+1)$, 解得 $b=0$.

又 $f(1) = a+1=3$, 则 $a=2$, 所以 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. 对任意 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x)$

$= -2x - \frac{1}{x} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

综上所述可得 $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

(2) **【证明】**对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{有 } f(x_1) - f(x_2) &= 2x_1 + \frac{1}{x_1} - 2x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= 2(x_1 - x_2) + \frac{(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(2x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2}, \end{aligned}$$

由 $1 \leq x_1 < x_2$, 可得 $2x_1 x_2 > 1$, $x_1 - x_2 < 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

(3) **【解】**由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=3$,

因为对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $m^2 - 2m \leq f(x)$, 所以 $m^2 - 2m \leq 3$, 即 $(m-3) \cdot (m+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq m \leq 3$,

即实数 m 的取值范围是 $[-1, 3]$.

9. A **【解析】**由题知 $f(x+1) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2 的函数. 因为函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

因为 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 所以



$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

由函数 $f(x)$ 的周期为 2, 可得 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上的单调性与在 $[0, 1]$ 上的单调性相同, 则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递增. 故选 A.

10. D 【解析】 因为 $f(2x-3)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 所以 $f(2x-3) + f[2(4-x)-3] = 2$, 即 $f(2x-3) + f(5-2x) = 2$, 令 $t = 2x-3$, 则 $x = \frac{t+3}{2}$, $f(t) + f(2-t) = 2$, 用 x 代替 t , 得 $f(x) + f(2-x) = 2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 所以 $f(1+x) + f(1-x) = 2$.

由 $f(2+x) - f(2-x) = 4x$, 可得 $f(2+x) - 2x = f(2-x) + 2x$, 即 $f(2+x) - 2(2+x) = f(2-x) - 2(2-x)$. 令 $g(x) = f(x) - 2x$, 则 $g(2+x) = g(2-x)$, 则 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

又因为 $g(1+x) + g(1-x) = f(1+x) - 2(1+x) + f(1-x) - 2(1-x) = f(1+x) + f(1-x) - 4 = 2 - 4 = -2$, 所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(1, -1)$ 对称, 故 $g(x)$ 是以 $4 \times |2-1| = 4$ 为周期的函数.

因为 $g(0) = f(0) - 2 \times 0 = 0$, $g(1) = -1$, $g(2) = -2 - g(0) = -2$, $g(3) = g(1) = -1$, 所以 $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = -4$, 即 $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = -4$, 所以 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = g(1) + g(2) + \cdots + g(50) + 2 \times (1+2+\cdots+50) = -4 \times 12 - 1 - 2 + 2 \ 550 = 2 \ 499$. 故 D 正确.

11. ABD 【解析】 令 $x=2$, 由 $f(x) = f(4-x) + 9f(2)$, 得 $f(2) = f(2) + 9f(2)$, 则 $f(2) = 0$, 所以 $f(x) = f(4-x)$, 即函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=2$.

又 $f(x+9)$ 的图象关于点 $(-9, 0)$ 对称, 令 $g(x) = f(x+9)$, 则 $g(-9+x) + g(-9-x) = 0$, $f(-9+x+9) + f(-9-x+9) = f(x) + f(-x) = 0$, 又 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(x)$ 是奇函数.

所以 $f(x)$ 是以 $4 \times |2-0| = 8$ 为周期的函数.

对于 A, $f(2) = 0$, 故 A 正确;

对于 B, $f(44) + f(45) + f(46) = f(4) + f(5) + f(6) = f(0) + f(-1) + f(-2) = 0 - f(1) - f(2) = -2 \ 022$, 故 B 正确;

对于 D, 令 $t = \frac{1}{3}x - 1$, 将 $x=3$ 代入得 $t=0$, 即要证明 $f(t)+3$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称, 显然由 $f(-t)+3+f(t)+3=6$, 可知 $f(t)+3$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称, 即 $f\left(\frac{1}{3}x-1\right)+3$ 的图象关于点 $(3, 3)$ 对



称,故 D 正确;

对于 C,同上,将 $x = -1$ 代入得 $t = -\frac{4}{3}$,

$\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$ 显然不是 $f(t) + 3$ 的图象的对称中心,故 C 错误.

12. C 【解析】由 $f(x+2)$ 为偶函数,可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称,则 $f(-x+2) = f(x+2)$.

因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x) = -f(x)$,则 $f(-x+2) = -f(x-2)$,所以 $f(x+2) = -f(x-2)$,所以 $f(x-2) = -f(x-6)$,故 $f(x+2) = f(x-6)$, $f(x)$ 的周期为 8.

因为对区间 $[0, 2]$ 上的任意 x_1, x_2 , 都有

$$\frac{f(x_1+4) - f(x_2+4)}{x_2 - x_1} > 0, \quad \text{所以}$$

$$\frac{f(x_1+4) - f(x_2+4)}{(x_1+4) - (x_2+4)} < 0, \quad \text{令 } g(x) = f(x+4),$$

$x \in [0, 2]$, 则 $g(x) = f(x+4)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,故 $f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 在 $[-6, -4]$ 上单调递减.

又 $f(x)$ 的周期为 8,故 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递减,则 $f(x)$ 在 $[2, 6]$ 上单调递减,

又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称,所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增,又 $f(x)$ 的周期为 8,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2) = -8$.

不等式 $f(x) \geq 6a^2 - 19a$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,故 $6a^2 - 19a \leq -8$,解得 $\frac{1}{2} \leq$

$$a \leq \frac{8}{3}.$$

当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $[a] = 0$; 当 $1 \leq a < 2$

时, $[a] = 1$; 当 $2 \leq a \leq \frac{8}{3}$ 时, $[a] = 2$.

故 $[a]$ 的最大值为 2. 故选 C.

13. ACD 【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 在 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ 中, 用 $-x$ 替换 x , 则 $2f(-x) + f(x^2 - 1) = 1$, 两式相减得 $2f(x) - 2f(-x) = 0$, 即 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数,故 A 正确.

令 $x = \sqrt{2}$, 则 $2f(\sqrt{2}) + f(1) = 1$, 令 $x = 1$, 则 $2f(1) + f(0) = 1$, 令 $x = 0$, 则 $2f(0) + f(-1) = 1$, 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-1) = f(1)$, 所以 $2f(0) + f(1) = 1$, 故 $f(1) = f(-1) = f(0) = \frac{1}{3}$, 所以 $f(\sqrt{2}) =$

$\frac{1}{3}$, 故 B 错误, C 正确.

 **提示:** 赋值法是求抽象函数的值的



常用方法

$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$, 注意到 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ 中两系数之和为 3, 若令 $f(x) = f(x^2 - 1)$, 则有 $3f(x) = 1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{3}$, 令 $x = x^2 - 1$, 解得 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 取 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 则 $3f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1$, 即 $f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $f(\sqrt{2}) = f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 上不单调, 故 D 正确.

故选 ACD.

快解

对于 A, 由题可知, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 由 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$, 知 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x^2 - 1) + \frac{1}{2}$, 而由函数奇偶性的定义易知函数 $y = f(x^2 - 1)$ 为偶函数, 所以 $f(x) = -\frac{1}{2}f(x^2 - 1) + \frac{1}{2}$ 为偶函数, 故 A 正确.

14. (1) 【证明】 $\because g(x) = \frac{5x+3}{x+1}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty), \therefore g(-2-x) = \frac{5x+7}{x+1}$.

$$\therefore g(x) + g(-2-x) = \frac{5x+3}{x+1} + \frac{5x+7}{x+1} = 10, \text{ 即}$$

对任意的 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 都有 $g(x) + g(-2-x) = 10$ 成立.

\therefore 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-1, 5)$ 对称.

(2) 【解】 $\because g(x) = \frac{5x+3}{x+1} = 5 - \frac{2}{x+1}$, 易知

$g(x)$ 在 $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ 上单调递增, \therefore 当 $x \in$

$\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ 时, $g(x) \in [-1, 4]$.

记函数 $y = h(x), x \in [0, 2]$ 的值域为 A .

若对任意的 $x_1 \in [0, 2]$, 总存在 $x_2 \in$

$\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$, 使得 $h(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则

$A \subseteq [-1, 4]$.

\because 当 $x \in [0, 1]$ 时, $h(x) = x^2 - mx + m + 1$,

$\therefore h(1) = 2$, 即函数 $h(x)$ 的图象过对称中心 $(1, 2)$.

① 当 $\frac{m}{2} \leq 0$, 即 $m \leq 0$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(0,$

1) 上单调递增. 由对称性知 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, \therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增.

易知 $h(0) = m + 1$, 又 $h(0) + h(2) = 4, \therefore h(2) = 3 - m$, 则 $A = [m + 1, 3 - m]$.



由 $A \subseteq [-1, 4]$, 得
$$\begin{cases} -1 \leq m+1, \\ 4 \geq 3-m, \\ m \leq 0, \end{cases}$$
 解得 $-1 \leq m \leq 0$.

②当 $0 < \frac{m}{2} < 1$, 即 $0 < m < 2$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(0, \frac{m}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{m}{2}, 1)$ 上单调递增.

由对称性知 $h(x)$ 在 $(1, 2 - \frac{m}{2})$ 上单调递增, 在 $(2 - \frac{m}{2}, 2)$ 上单调递减,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, \frac{m}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{m}{2}, 2 - \frac{m}{2})$ 上单调递增, 在 $(2 - \frac{m}{2}, 2)$ 上单调递减.

\therefore 结合对称性知 $A = [h(2), h(0)]$ 或 $A = [h(\frac{m}{2}), h(2 - \frac{m}{2})]$.

$\because 0 < m < 2, \therefore h(0) = m+1 \in (1, 3)$.

又 $h(0) + h(2) = 4, \therefore h(2) = 3-m \in (1, 3)$.

易知 $h(\frac{m}{2}) = -\frac{m^2}{4} + m + 1 \in (1, 2)$.

又 $h(\frac{m}{2}) + h(2 - \frac{m}{2}) = 4,$

$\therefore h(2 - \frac{m}{2}) \in (2, 3)$.

\therefore 当 $0 < m < 2$ 时, $A \subseteq [-1, 4]$ 成立.

③当 $\frac{m}{2} \geq 1$, 即 $m \geq 2$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

由对称性知 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

易知 $h(0) = m+1$, 又 $h(0) + h(2) = 4, \therefore h(2) = 3-m$, 则 $A = [3-m, m+1]$.

由 $A \subseteq [-1, 4]$, 得
$$\begin{cases} -1 \leq 3-m, \\ 4 \geq m+1, \\ m \geq 2, \end{cases}$$
 解得 $2 \leq m \leq 3$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $[-1, 3]$.

3.3 幂函数



基础上分

1. C 【解析】 $y = -x^2$ 的系数是 -1 而不是 1 , 故①不是幂函数;

$y = (x-1)^3$ 的底数是 $x-1$ 而不是 x , 故③不是幂函数;

$y = x^2 + x^3$ 是两个幂函数的和的形式, 故⑤不是幂函数;

故选 C.



2. B 【解析】若函数 $f(x) = (n^2 + 3n - 3)x^n$ 为幂函数, 则 $n^2 + 3n - 3 = 1$, 解得 $n = 1$ 或 $n = -4$. 故“ $f(x)$ 是幂函数”是“ $n = -4$ ”的必要不充分条件. **故 B 正确.**

3. D 【解析】因为 $f(x) = \left(a^2 - \frac{5}{2}a + 2\right)x^a$ 为幂函数,

所以 $a^2 - \frac{5}{2}a + 2 = 1$, 即 $2a^2 - 5a + 2 = 0$, 解得

$$a = 2 \text{ 或 } a = \frac{1}{2},$$

所以 $f(x) = x^2$ 或 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$,

又函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(x) = x^2$, $a = 2$,

所以 $f(a) = f(2) = 2^2 = 4$, **故选 D.**

4. D 【解析】函数 $f(x)$ 为幂函数, 设 $f(x) = x^\alpha$, 因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 所以 $2^\alpha = \sqrt{2}$, 所以 $\alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $y = f(x) + f(2-x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$,

由 $y = f(x) + f(2-x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ 有意义, 可得

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases} \text{ 所以 } 0 \leq x \leq 2,$$

所以函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的定义域为 $[0, 2]$. **故选 D.**

5. C 【解析】对于 A, $f(x) = x^2$ 的值域为 $[0, +\infty)$, $g(x) = x^3$ 的值域为 \mathbf{R} , **故 A 错误;**

对于 B, $f(x) = x^{-1}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 的值域为 $(0, +\infty)$, **故 B 错误;**

对于 C, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, **故 C 正确;**

对于 D, $f(x) = x^{-1}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = x^3$ 的值域为 \mathbf{R} , **故 D 错误. 故选 C.**

6. D 【解析】由题知, 函数 $y = x^{\frac{p}{3}}$ ($p \in \mathbf{Z}$) 为偶函数, 所以 $\frac{p}{3}$ 为偶数, 且由题图可知

$$\frac{p}{3} < 0, \text{ 则 } p \text{ 为偶数, 且 } p < 0, \text{ 故选 D.}$$

7. C 【解析】若 $\alpha = -1$, 则 $y = x^{-1}$ 的图象不过原点, **A 错误;**

对于幂函数 $y = x^\alpha$, 当 $x > 0$ 时, $x^\alpha > 0$ 恒成立, 因此幂函数的图象不过第四象限, **B 错误;**



当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$,

定义域不关于原点对称, 故 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 为非奇非偶函数, **C 正确**;

当 $\alpha = \frac{1}{3}$ 时, $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象过第一、三象限,

D 错误. 故选 C.

8. B 【解析】由题图可知幂函数 $y = x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $n < 0, m > 0$.

因为 $y = x^m$ 的图象的增长速度越来越慢, 所以 $0 < m < 1$.

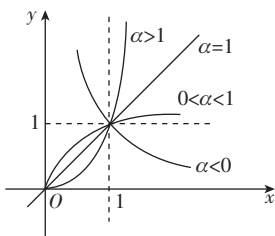
因为当 $x > 1$ 时, $y = x^n$ 的图象在 $y = x^{-1}$ 的图象的下方, 所以 $n < -1$.

综上, $0 < m < 1, n < -1$, 故 **B 正确**.

二级结论 幂函数图象的分布规律

幂函数图象的分布规律可用“一全有、二一偶、三一奇、四全无”来说明.

(1) “一全有”: 首先确定第一象限的图象(所有幂函数的图象在第一象限都出现), 分布情况如图所示, 其中, 在直线 $x = 1$ 的右侧, α 越大, 图象越高, 越趋向于直线 $x = 1$; α 越小, 图象越低, 越趋向于 x 轴.



(2) “二一偶”: 经过第二、一象限的幂函数为偶函数.

(3) “三一奇”: 经过第三、一象限的幂函数为奇函数.

(4) “四全无”: 幂函数的图象一定不经过第四象限.

9. D 【解析】对于 A: 由幂函数的性质可以判断出 $a < 0$, 由一次函数图象经过第一、

三、四象限, 可得 $\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{1}{a} < 0, \end{cases}$ 则 $a > 0$, 故 **A**

错误;

对于 B: 由幂函数的性质可以判断出 $a > 0$, 由一次函数图象经过第一、二、四象限, 可

得 $\begin{cases} a < 0, \\ -\frac{1}{a} > 0, \end{cases}$ 则 $a < 0$, 故 **B 错误**;

对于 C: 由幂函数的性质可以判断出 $a < 0$, 由一次函数图象经过第二、三、四象限, 可



$$\text{得} \begin{cases} a < 0, \\ -\frac{1}{a} < 0, \end{cases} \text{无解, 故 C 错误;}$$

对于 D: 由幂函数的性质可以判断出 $a > 0$, 由一次函数图象经过第一、三、四象限, 可

$$\text{得} \begin{cases} a > 0, \\ -\frac{1}{a} < 0, \end{cases} \text{则 } a > 0, \text{可以同时成立, 故 D}$$

正确.

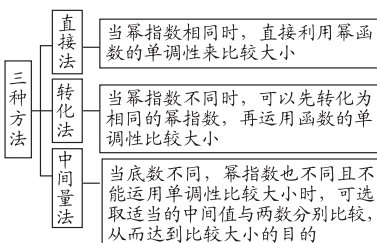
故选 D.

10. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} m^2 - m - 1 = 1, \\ m^2 + m - 3 > 0, \end{cases}$ 解

得 $m = 2$. 故选 C.

11. A 【解析】幂函数 $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $c = 1 = 1^{0.5}$, 又因为 $1.01 > 1 > 0.99$, 所以 $b > c > a$, 故 A 正确.

方法总结 幂值大小比较的常用方法



12. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调, 由 $y = x^2 - 2ax + a + 2$ 在 $(-\infty, 1]$ 上不可能单调递增, 知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不可能单调递增, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减.

$$\text{所以} \begin{cases} 1 \leq a, \\ 2a - 6 < 0, \\ 1 - 2a + a + 2 \geq 1^{2a-6}, \end{cases} \text{解得 } 1 \leq a \leq 2,$$

所以实数 a 的取值范围是 $[1, 2]$. 故 D 正确.

13. D 【解析】设 $f(x) = x^\alpha$, 因为幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{2})$, 所以 $2^\alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\alpha = -1$, 所以 $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 所以不等式 $f(3 - 2m) < 1$ 可化为 $f(3 - 2m) < f(1)$.

又当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $3 - 2m < 0$ 或 $3 - 2m > 1$, 即 $m > \frac{3}{2}$ 或 $m < 1$, 故选 D.

14. BC 【解析】若 $\alpha = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, 定义域为 $[0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 的图象一定不关于 y 轴对称, 故 A 错误. 若 $\alpha = 2$, 则 $f(x) = x^2$, 可知 $f(x)$ 的图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 0$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上



单调递增,故 B 正确.

若 $\alpha = -1$, 则 $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 可知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 C 正确.

$$\begin{aligned} \text{若 } \alpha = 3, \text{ 则 } f(x) &= x^3, \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - \\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} \\ &= \frac{4(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^3}{8} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)[4(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)]}{8} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)(3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2)}{8} \\ &= \frac{3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2}{8}, \end{aligned}$$

故只有当 $x_1 + x_2 \geq 0$ 时才有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 故 D 错误.

故选 BC.

15. [1, 3) 【解析】依题意, $f(x) = (2-3a) \cdot x+5$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

$f(x) = x^{a-3} + 3$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 分段点处左边函数值不小于右边函数值,

$$\text{故 } \begin{cases} 2-3a < 0, \\ a-3 < 0, \\ 1^{a-3} + 3 \geq (2-3a) \times 1 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{2}{3}, \\ a < 3, \\ a \geq 1, \end{cases} \text{ 则}$$

$$1 \leq a < 3,$$

所以实数 a 的取值范围为 $[1, 3)$.

16. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 【解析】幂函数

$y = x^{m^2-2m-3} (m \in \mathbf{N})$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $m^2 - 2m - 3 < 0$, 解得 $-1 < m < 3$.

又 $m \in \mathbf{N}$, 故 $m = 0, 1, 2$.

当 $m = 0$ 时, $y = x^{-3}$ 的图象不关于 y 轴对称, 舍去;

当 $m = 1$ 时, $y = x^{-4}$ 的图象关于 y 轴对称, 满足;

当 $m = 2$ 时, $y = x^{-3}$ 的图象不关于 y 轴对称, 舍去.

故 $m = 1$, 不等式化为 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$, 结合函数 $y = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递减,

可知 $a+1 > 3-2a > 0$ 或 $0 > a+1 > 3-2a$ 或 $a+1 < 0 < 3-2a$, 解得 $a < -1$ 或 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$.



易错警示 忽略幂函数图象不连续的情况而致错

幂函数 $y = x^{-1}$ 的图象不连续, 在两段区间上分别单调递减, 此时由 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$ 进行等价转化时, 要考虑 $3-2a$ 与 $a+1$ 都大于 0、都小于 0 或者一正一负三种情况, 不要漏解.

17. (1)【解】 由函数 $f(x) = (8m^2 - 1)x^m$ 是幂函数, 得 $8m^2 - 1 = 1$, 解得 $m = \pm \frac{1}{2}$.

当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 显然此函数图象不可能过点 $(-\frac{1}{2}, n)$, 故 $m = \frac{1}{2}$ 不符合题意.

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 显然此函数图象可以过点 $(\frac{1}{2}, n)$,

所以 $m = -\frac{1}{2}$, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $n = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

(2)【证明】 由(1)知, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, 则函数 $g(x) = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 < x_2, g(x_1) - g(x_2) = \sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \left(\sqrt{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \right) = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \right)$,

由 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 得 $0 < \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} < 1$, 且 $0 < \sqrt{x_1 x_2} < 1$, 因此 $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < 0$, $1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} < 0$,

即有 $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \right) > 0$, 则 $g(x_1) > g(x_2)$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

18.【解】(1) 由幂函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知 $4m - m^2 > 0$, 解得 $0 < m < 4$, 又因为 $m \in \mathbf{Z}$, 所以 $m = 1$ 或 $m = 2$ 或 $m = 3$.

当 $m = 1$ 或 $m = 3$ 时, $f(x) = x^3$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 不符合题意;

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^4$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意.

综上, $m = 2, f(x) = x^4$.

(2) 由偶函数 $f(x) = x^4$ 在 $(0, +\infty)$ 上单



调递增,知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

由 $f(a+2) < f(1-2a)$,知 $|a+2| < |1-2a|$,

即 $a^2+4a+4 < 4a^2-4a+1$,所以 $3a^2-8a-$

$3 = (3a+1)(a-3) > 0$,可得 $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > 3$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$.



对点上分

1. B 【解析】由①②可得 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

对于 A, $f(x) = \sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 不可能为奇函数, 故 A 错误;

对于 B, $f(x) = x^3$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 故 $f(x) = x^3$ 为奇函数,

提示: 指数为奇数的幂函数为奇函数, 指数为偶数的幂函数为偶函数

根据幂函数的性质可得 $f(x) = x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 正确;

对于 C, 根据幂函数的性质可得 $f(x) = x^{-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 C 错误;

对于 D, $f(x) = x^2$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 故 $f(x) = x^2$ 为偶函数, 故 D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】由题图可知, C_1 在第一象限内单调递减, 则指数 α 的值满足 $\alpha < 0$;

C_2 在第一象限内单调递增, 且图象呈现上凸趋势, 则指数 α 的值满足 $0 < \alpha < 1$;

C_3 在第一象限内单调递增, 且图象呈现下凸趋势, 则指数 α 的值满足 $\alpha > 1$. 故选 D.

3. C 【解析】由题得, 点 $A(1, 0), B(0, 1)$, $BM = MN = NA$,

所以 $M\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), N\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 分别代入 $y = x^\gamma, y = x^\beta$ 中,

得 $\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^\gamma, \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^\beta$, 则 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma\beta} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^\gamma\right]^\beta = \left(\frac{2}{3}\right)^\beta = \frac{1}{3}$.

所以 $\gamma\beta = 1$.

故选 C.

4. C 【解析】由 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数, 得 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$.

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x)$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 此时乙和丙的论述是错误的, 甲的论述是正确的,



故 $m = -1$ 不符合题意;

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^2$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时乙和丙的论述是正确的, 甲的论述是错误的, 故 $m = 2$ 符合题意.

综上所述, m 的值为 2, 故选 C.

5. A 【解析】 令 $g(x) = f(x) - 1 = \sqrt[3]{x} + x$, 因为 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $g(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x) = -\sqrt[3]{x} - x = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称.

函数 $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$ 都是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 而 $f(1-m) + f(2m) > 2 \Leftrightarrow f(1-m) - 1 > -[f(2m) - 1] \Leftrightarrow g(1-m) > -g(2m) = g(-2m)$, 所以 $1-m > -2m$, 解得 $m > -1$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-1, +\infty)$. 故 A 正确.

6. 4 053 【解析】 由函数 $f(x)$ 既是二次函数又是幂函数, 得 $f(x) = x^2$, 则 $h(x) = \frac{g(x)}{x^2+1} + 1$.

又 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $h(x) +$

$$h(-x) = \frac{g(x)}{x^2+1} + 1 + \frac{g(-x)}{x^2+1} + 1 = 2, h(0) =$$

$$\frac{g(0)}{0+1} + 1 = 1,$$

因此 $h(2\ 026) + h(2\ 025) + h(2\ 024) + h(2\ 023) + h(2\ 022) + \cdots + h(1) + h(0) + h(-1) + \cdots + h(-2\ 022) + h(-2\ 023) + h(-2\ 024) + h(-2\ 025) + h(-2\ 026) = 2\ 026 \times 2 + 1 = 4\ 053$.

7. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 【解析】 因为幂函数

$f(x) = x^{3m-9}$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 的图象关于 y 轴对称, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数,

则 $3m-9$ 为偶数, 所以 m 为奇数, 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $3m-9 < 0$, 解得 $m < 3$, 又 $m \in \mathbf{N}^*$ 且 m 为奇数, 所以 $m = 1$,

故不等式 $(a+1)^{-\frac{m}{3}} < (3a-2)^{-\frac{m}{3}}$ 可化为 $(a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3a-2)^{-\frac{1}{3}}$,

函数 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上均单调递减,

所以 $a+1 > 3a-2 > 0$ 或 $0 > a+1 > 3a-2$ 或 $a+1 < 0 < 3a-2$,

解得 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a < -1$,

故不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.



$$\frac{3}{2}) .$$

8. < 【解析】因为函数 $f(x)$ 是幂函数, 所以 $2m^2 - m - 5 = 1$, 即 $2m^2 - m - 6 = 0$, 解得 $m = -\frac{3}{2}$ 或 $m = 2$.

当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$; 当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^5$.

因为函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

且 $x_1 \neq x_2$, 满足 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 所以函数 f

(x) 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) =$

x^5 . 因为 $f(x) = x^5$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) =$

$(-x)^5 = -x^5 = -f(x)$, 所以函数 $f(x) = x^5$ 是奇函数.

因为 $f(a) + f(b) < 0$, 所以 $f(a) < -f(b) =$

$f(-b)$, 所以 $a < -b$, 即 $a + b < 0$.

9. 【解】(1) 由函数 $f(x) = (m^2 - m + 1)x^{m - \frac{1}{2}}$ 是幂函数, 得 $m^2 - m + 1 = 1$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$.

当 $m = 0$ 时, 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不满足 $f(2) < f(3)$, 不符合题意;

当 $m = 1$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 满足 $f(2) < f(3)$, 符合题意.

所以 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$.

(2) 假设存在实数 n , 使得 $g(x)$ 的最小值为 -13 .

由 (1) 得 $g(x) = n\sqrt{2x-1} + 2x - 5 \left(\frac{5}{2} \leq x \leq 13 \right)$, 由 $\frac{5}{2} \leq x \leq 13$ 得 $2 \leq \sqrt{2x-1} \leq 5$, 令

$t = \sqrt{2x-1}$, $h(t) = nt + t^2 + 1 - 5 = t^2 + nt - 4$, $t \in [2, 5]$, 则 $h(t)$ 的最小值为 -13 .

当 $-\frac{n}{2} \leq 2$, 即 $n \geq -4$ 时, $h(t)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递增, $h(t)_{\min} = h(2) = 2n - 13$, 解得 $n = -\frac{13}{2} < -4$, 矛盾;

当 $2 < -\frac{n}{2} < 5$, 即 $-10 < n < -4$ 时, $h(t)_{\min} = h\left(-\frac{n}{2}\right) = -\frac{n^2}{4} - 4 = -13$, 则 $n = -6$;

当 $-\frac{n}{2} \geq 5$, 即 $n \leq -10$ 时, $h(t)$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减, $h(t)_{\min} = h(5) = 5n + 21 = -13$, 解得 $n = -\frac{34}{5} > -10$, 矛盾.

所以存在实数 n , 使得 $g(x)$ 的最小值为 -13 , n 的值为 -6 .



3.4 函数的应用(一)



基础上分

- 1. D** 【解析】设从甲仓库调往 A 县的车辆数为 x , 则从甲仓库调往 B 县的车辆数为 $12-x$, 从乙仓库调往 A 县的车辆数为 $10-x$, 从乙仓库调往 B 县的车辆数为 $6-(10-x)=x-4$.

设总费用为 y , 则 $y=40x+80\times(12-x)+30\times(10-x)+50\times(x-4)=1\,060-20x(4\leq x\leq 10, x\in\mathbf{N})$, 要使总费用 y 最少, 则需 x 最大, 所以当 $x=10$ 时, 总费用 y 最少, 为 860 元.

- 2. B** 【解析】由题知, 小王在 15:00—18:00 时段充电 0.5 小时, 费用为 $6.5\times 0.5\times 1.4=4.55$ (元),

在 18:00—21:00 时段充电 3 小时, 费用为 $6.5\times 3\times 1.6=31.2$ (元),

设在 21:00—23:00 时段充电时间为 x 小时, 费用为 $6.5x\times 1.4=9.1x$ (元),

则小王应缴纳的充电费 $y=4.55+31.2+9.1x=9.1x+35.75$,

因为 $0<x\leq 0.5$, 所以 $35.75<y\leq 40.3$.

故选 B.

- 3. C** 【解析】汽车行驶的路程与耗油量成正比, 是一次函数关系, 故 A 错误;

设原来的人口数是 a , x 年后的人口数是 y , 则 $y=a(1+1\%)^x$, 不是二次函数关系, 故 B 错误;

竖直向上发射的信号弹, 从发射到落回地面, 信号弹的高度与时间的关系(不计空气阻力), 根据物理知识可知是二次函数关系, 故 C 正确;

在核电站中, 作为核燃料的某放射性元素裂变后所剩的原子数随使用时间的变化关系, 应是递减的, 不是二次函数关系, 故 D 错误.

- 4. 20** 【解析】如图, 设锐角三角形的顶点为 P, Q, R , 过点 P 作 $PN\perp QR$ 于点 N ,

其内接矩形为矩形 $ABCD$, PN 与 AB 交于点 M , 则 $AB=x$ m, 设 $AD=y$ m, $0<x<40, 0<y<40$,

由矩形性质可得 $AB\parallel CD$, 则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PQR$ 相似, $\triangle PMB$ 与 $\triangle PNR$ 相似,

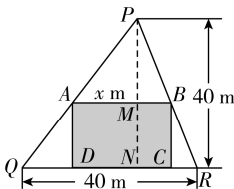
则有 $\frac{PB}{PR}=\frac{AB}{QR}=\frac{x}{40}$, $\frac{PM}{PN}=\frac{PB}{PR}=\frac{40-y}{40}$, 即

$$\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40},$$

即 $y=40-x$, 则矩形面积 $S=xy=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400$,



则当 $x=20$ 时,矩形面积最大.



5. B 【解析】依题意, $x>0$, 每吨的平均处理

成本 $\frac{y}{x} = 2 \left(x + \frac{10\,000}{x} \right) - 180 \geq 2 \times 2\sqrt{10\,000} - 180 = 220$, 当且仅当 $x = \frac{10\,000}{x}$, 即 $x=100$ 时取等号,

所以当月处理量为 100 吨时, 可以使每吨的平均处理成本最低. **故选 B.**

6. AC 【解析】依题意可设 $v=kr^4$, k 为常数.

当气体在半径为 5 cm 的管道中时, 其流量为 $1\,250 \text{ cm}^3/\text{s}$, 所以 $1\,250=k \times 5^4$, 解得 $k=2$, 则 $v=2r^4$.

当 $r=3 \text{ cm}$ 时, $v=162 \text{ cm}^3/\text{s}$, **故 A 正确, B 错误.**

由 $2r^4 \geq 512$, 解得 $r \geq 4 \text{ cm}$, **故 C 正确, D 错误. 故选 AC.**

7. 125 【解析】由投入广告费用为 3 万元

时, 药品利润为 27 万元, 代入 $y=x^a$ 中, 即 $3^a=27$, 解得 $a=3$, 故函数关系式为 $y=x^3$, 所以当 $x=5$ 时, $y=125$ 万元.

8. 7 700 【解析】因为长方体沼气池的容积

为 50 立方米, 深为 2 米, 所以长方体沼气池的底面面积为 25 平方米.

设长方体沼气池底面一条边的长为 x 米,

$x>0$, 则另一条边的长为 $\frac{25}{x}$ 米, 所以池壁的

面积为 $\left(2x + 2 \times \frac{25}{x} \right) \times 2 = 4x + \frac{100}{x}$ (平方米).

设沼气池的总造价为 y 元, 则 $y = \left(4x + \frac{100}{x} \right) \times 80 + 100 \times 25 + 2\,000 = \left(x + \frac{25}{x} \right) \times$

$320 + 4\,500$, 当 $x>0$ 时, 根据对勾函数性

质, 函数 $y = x + \frac{25}{x}$ 有最小值 10, 此时 $x=5$,

所以当长方体沼气池底面是边长为 5 米的正方形时, 沼气池的总造价最低, 最低总造价为 7 700 元.

9. C 【解析】由题意可知, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t = t^2;$$

当 $1 < t \leq 2$ 时, $f(t) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + (t-1) \cdot 2 = 2t-1$.

$$\text{所以 } f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2t-1, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$



结合不同段上函数的图象可知, **C 正确**.

- 10. B** 【解析】设前 3 天共买了 m 盒, 第 4 天到第 8 天共买了 n 盒, 则 $26m+22n+4 \times 18=212$, 整理得 $n=\frac{70-13m}{11}$.

因为 m, n 均为非负整数, 所以 $70-13m=0$ 或 $70-13m$ 是 11 的正整数倍, 当 $m=2$ 时, $n=4$, 得 $m+n=6$, 故前 8 天一共买了 6 盒. **故选 B.**

- 11. B** 【解析】因为茶水温度 y (单位: $^{\circ}\text{C}$) 和泡茶时间 t (单位: min) 满足关系式 $y=$

$$\begin{cases} -5t+70, 0 < t \leq 5, \\ \frac{200}{t}+5, 5 < t \leq 10, \end{cases} \text{且喝茶的最佳口感水}$$

温大约是 60°C , 所以当 $0 < t \leq 5$ 时, 由 $-5t+70=60$, 可得 $t=2$, 符合题意; 当 $5 < t \leq 10$ 时, 由 $\frac{200}{t}+5=60$, 解得 $t=\frac{40}{11}$, 舍去.

故泡茶后需要等待的时间为 2 min. **故选 B.**

- 12. 【解】**(1) 由题可知, $W(x)=xG(x)-50-$

$$100x = \begin{cases} -50+80x-x^2, 0 < x \leq 20, \\ -20x+1\,950-\frac{8\,000}{x-1}, x > 20. \end{cases}$$

(2) 当 $0 < x \leq 20$ 时, $W(x) = -50+80x-x^2 = -(x-40)^2+1\,550$,

易知在 $(0, 20]$ 上 $W(x)$ 单调递增, 所以当 $x=20$ 时, $W(x)$ 取最大值 1 150.

当 $x > 20$ 时, $W(x) = -20x+1\,950-\frac{8\,000}{x-1} = -20 \left[(x-1) + \frac{400}{x-1} \right] + 1\,930 \leq$

$$-20 \times 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{400}{x-1}} + 1\,930 = 1\,130,$$

当且仅当 $x-1=\frac{400}{x-1}$, 即 $x=21$ 时, 等号成立, 所以当 $x=21$ 时, $W(x)$ 取最大值 1 130.

因为 $1\,150 > 1\,130$, 所以当 $x=20$ 时, $W(x)_{\max} = 1\,150$, 即当年产量为 20 万台时, 该公司获得的年利润最大, 最大年利润为 1 150 万元.

真题上分

- 1. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$** 【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{x}$

$$+ \sqrt{1-x}, \text{ 所以 } \begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

- 2. $\frac{37}{28}$ $3+\sqrt{3}$** 【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 =$

$$\frac{7}{4}, f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 = \frac{37}{28}, \text{ 所以}$$



$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{37}{28}.$$

当 $x \leq 1$ 时, 由 $1 \leq f(x) \leq 3$, 可得 $1 \leq -x^2 + 2 \leq 3$, 所以 $-1 \leq x \leq 1$;

当 $x > 1$ 时, 由 $1 \leq f(x) \leq 3$, 可得 $1 \leq x + \frac{1}{x} - 1 \leq 3$, 所以 $1 < x \leq 2 + \sqrt{3}$.

故 $1 \leq f(x) \leq 3$ 的解集为 $[-1, 2 + \sqrt{3}]$, 所以 $[a, b] \subseteq [-1, 2 + \sqrt{3}]$, 所以 $b - a$ 的最大值为 $3 + \sqrt{3}$.

3. B 【解析】 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$.

对于 A 选项, $f(x-1) - 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 为非奇非偶函数, **不符合题意**;

对于 B 选项, $f(x-1) + 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 则函数 $y = \frac{2}{x}$ 为奇函数, **符合题意**;

对于 C 选项, $f(x+1) - 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, **不符合题意**;

对于 D 选项, $f(x+1) + 1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x+2}$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, **不符合题意**. 故选 B.

快解

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}.$$

函数 $f(x)$ 的图象是由 $y = \frac{2}{x}$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度得到的, 则其对称中心为 $(-1, -1)$. 结合选项知 $f(x-1) + 1$ 图象的对称中心为 $(0, 0)$, **故选 B**.

4. D 【解析】由图象可知函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 而函数 $y = \frac{x}{1-|x|}$, $y = \frac{x}{|x|-1}$ 是奇函数, 故 A, B 错误;

当 $x > 1$ 时, 由题图知 $f(x) > 0$, 且此时 $x^2 > 1$, 即 $x^2 - 1 > 0$, $1 - x^2 < 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $y = \frac{|x|}{1-x^2} < 0$, $y = \frac{|x|}{x^2-1} > 0$, 故 C 错误, D 正确. 故



选 D.

快解 当 $x=2$ 时, 由题图知 $f(x)>0$.

对于 A, $f(2) = \frac{2}{1-|2|} < 0$, 故 A 错误;

对于 B, $f(2) = \frac{2}{2-1} > 0$; 对于 C, $f(2) =$

$\frac{2}{1-4} < 0$, 故 C 错误; 对于 D, $f(2) =$

$\frac{2}{4-1} > 0$.

当 $x=-2$ 时, 由题图知 $f(x)>0$, 对于

B, $f(-2) = \frac{-2}{2-1} < 0$, 故 B 错误; 对于 D,

$f(-2) = \frac{2}{4-1} > 0$, 故 D 正确. 故选 D.

方法总结 判断函数图象对应的解析式的方法

(1) 函数性质判断: 通过观察图象判断函数的定义域、值域、奇偶性、单调性等性质, 并验证选项中所给函数的性质是否符合, 从而选择对应的函数解析式;

(2) 特殊值代入: 选用几个特殊的函数值代入所给的解析式, 并将代入结果与图象信息进行比较, 从而排除不符合图象的解析式.

5. B 【解析】由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 知 $f(3) > f(2) + f(1) = 3$, $f(4) > f(3) + f(2) > 3 + 2 = 5$,

$f(5) > f(4) + f(3) > 5 + 3 = 8$, $f(6) > f(5) + f(4) > 8 + 5 = 13$,

以此类推, 得到 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) > 3$, $f(4) > 5$, $f(5) > 8$, $f(6) > 13, \dots$,

即 $1, 2, >3, >5, >8, >13, \dots$, 则 $f(10) > 89$, $f(16) > 1\,597$, 所以 $f(20) > f(16) > 1\,597$, 故 B 正确, A 错误;

由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 知 $f(x)$ 取比 $f(x-1) + f(x-2)$ 大的数, 所以 $f(x)$ 无最大值, 故 C, D 错误. 故选 B.

6. A 【解析】在 $f(x+y) + f(x-y) = f(x) \cdot f(y)$ 中, 令 $y = 1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)$ ①, 所以 $f(x+2) + f(x) = f(x+1)$ ②.

由①②相加, 整理得 $f(x+2) + f(x-1) = 0$,

所以 $f(x+3) + f(x) = 0$, 即 $f(x+3) = -f(x)$,

所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

在 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ 中, 令 $y = 0$, 得 $f(x) + f(x) = f(x)f(0)$, 所以 $f(0) = 2$.

令 $x = 1, y = 1$, 得 $f(2) + f(0) = f(1)f(1)$, 所



以 $f(2) = -1$.

由 $f(x+3) = -f(x)$, 得 $f(3) = -f(0) = -2$, $f(4) = -f(1) = -1$, $f(5) = -f(2) = 1$, $f(6) = -f(3) = 2$, 所以 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 1 - 1 - 2 - 1 + 1 + 2 = 0$.

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 3[f(1) + f(2) + \dots + f(6)] + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 3 \times 0 + 1 - 1 - 2 - 1 = -3$, 故选 A.

7. D 【解析】因为 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以 $g(2-x) = g(2+x)$, 而 $f(x) + g(2-x) = 5$, 故 $f(-x) + g(2+x) = 5$, 故 $f(x) = f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数.

由 $g(2) = 4$, $f(0) + g(2) = 5$, $g(2) - f(-2) = 7$, 得 $f(0) = 1$, $f(-2) = f(2) = -3$.

由 $g(x) = f(x-4) + 7$, 且 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $f(-2-x) = f(-2+x) = f(2+x)$, 则 $f(x) = f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

又由 $f(1) + g(1) = 5$, $g(1) - f(-3) = g(1) - f(1) = 7$, 得 $f(1) = f(-3) = f(3) = -1$, 又

$f(4) = f(0) = 1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 6f(1) + 6f(2) + 5f(3) + 5f(4) = 6 \times (-1) + 6 \times (-3) + 5 \times (-1) + 5 \times 1 = -24$, 故选 D.

一题多解

因为 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以 $g(2-x) = g(2+x)$, $g(1) = g(3)$.

因为 $f(x) + g(2-x) = 5$, 所以 $f(x) = 5 - g(2-x)$, $f(0) = 5 - g(2) = 1$.

因为 $g(x) - f(x-4) = 7$, 所以 $f(x) = g(x+4) - 7$, $g(4) = f(0) + 7 = 8$.

因此 $g(x+4) = 12 - g(2-x) = 12 - g(x+2) = 12 - g(x-2+4) = 12 - [12 - g(x)] =$

$g(x)$, $f(x) = \frac{1}{2}[g(x+4) - g(2-x)] -$

$1 = \frac{1}{2}[g(x+4) - g(x+2)] - 1$.

于是 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{22} [g(k+4) - g(k+2)] - 22$

$= \frac{1}{2} \{ [g(5) - g(3)] + [g(6) - g(4)] + [g(7) - g(5)] + \dots + [g(25) - g(23)] + [g(26) - g(24)] \} - 22$

$= \frac{1}{2} [g(25) + g(26) - g(3) - g(4)] - 22$

$= \frac{1}{2} [g(1) + g(2) - g(3) - g(4)] - 22$

$= -24$. 故选 D.



方法总结 ①若 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 则 $f(a+x)=f(a-x)$ 恒成立;
 ②若 $f(a+x)+f(b-x)=c$, 则 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 中心对称.

8. 0 (答案不唯一) 1 【解析】若 $a=0$, 则

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ 存在最小值 } 0,$$

所以 a 的一个取值可以为 0.

若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 不可能存在最小值.

若 $0 < a \leq 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$;

当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [0, +\infty)$,

若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$.

若 $a > 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [(a-2)^2, +\infty)$,

若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$, 不等式无解.

综上, $0 \leq a \leq 1$, 所以 a 的最大值为 1.

9. 【解】 \because 函数 $f(x) = 2|x-a| - a =$

$$\begin{cases} 2x-3a, & x \geq a, \\ a-2x, & x < a, \end{cases} \quad a > 0, \text{ 作出其大致图象如图}$$

所示.

(1) 当 $2x-3a=x$ 时, $x=3a$; 当 $a-2x=x$ 时,

$$x = \frac{a}{3}, \because f(x) < x, \therefore \frac{a}{3} < x < 3a, \text{ 即不等式 } f$$

$$(x) < x \text{ 的解集为 } \left\{ x \mid \frac{a}{3} < x < 3a \right\}.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的两个交点

分别为 A, B , 当 $2x-3a=0$ 时, $x=\frac{3a}{2}$; 当 $a-$

$2x=0$ 时, $x=\frac{a}{2}$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象与

x 轴的交点坐标为 $A\left(\frac{a}{2}, 0\right), B\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$,

则 $|AB| = \frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = a$. 设函数 $y=a-2x$ 和

$y=2x-3a$ 的图象的交点为 C , 联立

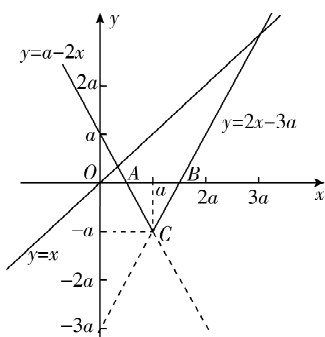
$$\begin{cases} y=a-2x, \\ y=2x-3a, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=a, \\ y=-a, \end{cases} \text{ 即 } C(a, -a), \text{ 由}$$

图可知曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形

为 $\triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot$

$$a = 2, \therefore a^2 = 4.$$

又 $a > 0, \therefore a = 2$.





第三章 全章上分

1. D 【解析】依题意得 $\begin{cases} 1 - \sqrt{2x-1} \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的定义域为 } \left[\frac{1}{2}, 1 \right],$$

故选 D.

2. B 【解析】记 $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|}$, 则 $f(x)$ 的定义

$$\text{域为 } \{x | x \neq 0\}, f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{|-x|} = \frac{x^2-1}{|x|} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 A, C, D 错误, B 正确. 故选 B.

3. C 【解析】用 x 代替 $f(2x+3) = -f(2x)$ 中的 $2x$, 可得 $f(x+3) = -f(x)$,

则 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 可知函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

又因为函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 则 $f(200) = f(2) = f(-2) = f(4)$,

当 $3 \leq x < 5$ 时, $f(x) = 3x-4$, 所以 $f(200) = f(4) = 3 \times 4 - 4 = 8$.

4. C 【解析】由题知, 当 AQI 大于 200 时, 不宜开展户外活动, 即当 AQI 小于等于 200 时, 适宜开展户外活动, 即 $y \leq 200$,

$$\text{因为 } y = \begin{cases} -10t+290, & 0 \leq t \leq 12, \\ 56\sqrt{t}-24, & 12 < t \leq 24, \end{cases} \text{ 所以当 } 0 \leq$$

$t \leq 12$ 时, 只需 $-10t+290 \leq 200$, 解得 $9 \leq t \leq 12$, 当 $12 < t \leq 24$ 时, 只需 $56\sqrt{t}-24 \leq 200$, 解得 $12 < t \leq 16$,

综上, 适宜开展户外活动的时间段为 $9 \leq t \leq 16$, 共计 7 个小时. 故选 C.

5. C 【解析】 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $f(-2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) = -f(-2) = 0$, $f(0) = 0$, 所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$.

$(x+1)[f(x)-2f(-x)] < 0$ 可化为 $3(x+1)f(x) < 0$, 可得

$$\begin{cases} x+1 < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ f(x) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x < -1, \\ -2 < x < 0 \text{ 或 } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x > -1, \\ x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2, \end{cases}$$

解得 $-2 < x < -1$ 或 $0 < x < 2$. 故选 C.

6. C 【解析】 \because 当 $x_2 > x_1 > 1$ 时, $[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.



又 \because 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对

称, $\therefore a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$.

又 $\because b=f(2), c=f(\pi)$, 且 $2<\frac{5}{2}<\pi$,

$\therefore f(2)>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(\pi)$, 即 $b>a>c$.

方法总结

比较函数值的大小时, 应先将自变量转化到同一个单调区间内, 然后利用函数的单调性解决.

7. BD 【解析】对于 A: 函数 $y=x^a$ 的图象恒过点 $(1,1)$, 故 A 错误;

对于 B: 因为 $g(-x)+g(x)=6$, 则

$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=3$, 故 $g(x)$ 的图象关于点

$(0,3)$ 对称, 故 B 正确;

对于 C: 因为 $x>0$, 所以 $y=x+\frac{3}{x+1}-1=x+$

$1+\frac{3}{x+1}-2\geq 2\sqrt{(x+1)\times\frac{3}{x+1}}-2=2\sqrt{3}-2$,

当且仅当 $x=\sqrt{3}-1$ 时取等号, 故 C 错误;

对于 D: 要使 $g(x)=\sqrt{-x^2-x+2}$ 有意义,

则 $-x^2-x+2\geq 0$, 解得 $-2\leq x\leq 1$, 则 $g(x)$ 的

定义域为 $[-2,1]$, 由复合函数的单调性可

得 $g(x)=\sqrt{-x^2-x+2}$ 在 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ 上单

调递增, 在 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 故 D 正

确. 故选 BD.

8. BCD 【解析】对于 A, 由函数 $f(x)$ 为幂函数, 得 $m^2-m-1=1$, 解得 $m=-1$ 或 2 .

当 $m=-1$ 时, $f(x)=x$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $m=2$ 时, $f(x)=x^{-2}$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意. 故 $m=2$, 故 A 错误.

对于 B, 由选项 A 知 $f(x)=x^{-2}$, 可得 $f(-1)=1$, 故 B 正确.

对于 C, 由函数 $f(x)$ 为偶函数, 可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 可得 $f(b)>f(a)$, 故 C 正确.

对于 D, 由 $f(x)=x^{-2}$, $a>b>0$, 知 $f(a)+$

$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{8}{(a+b)^2}>\frac{1}{a^2}+$

$\frac{1}{b^2}-\frac{8}{4ab}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2>0$, 可得 $f(a)+$

$f(b)>2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 故 D 正确. 故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A, 由 $f(2x+2)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称, 得 $f(2(x-1)+2)=f$



$(2(-x-1)+2)$, 即 $f(2x)=f(-2x)$, 而函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $f(x)=f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数, **A 正确**.

对于 B, 由 $f(x+1)+f(x-1)=2$, 得 $f(1)+f(-1)=2$, 即 $2f(1)=2$, 解得 $f(1)=1$, **B 错误**.

对于 C, 由 $f(x+1)+f(x-1)=2$, 得 $f(x+2)=-f(x)+2$, 则 $f(x+4)=-f(x+2)+2=-[-f(x)+2]+2=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 的周期为 4. 由 $g(x)-f(x-4)=8$, 得 $g(x)=f(x-4)+8$, $g(x+4)=f(x)+8=f(x-4)+8=g(x)$, 则函数 $g(x)$ 的周期为 4, $g(2025)=g(506 \times 4 + 1)=g(1)=f(1)+8=9$, **C 正确**.

对于 D, 由 $f(x+2)=-f(x)+2$, 得 $f(x+2)+f(x)=2$, 则 $f(1)+f(3)=f(2)+f(4)=2$, 所以 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=32+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=36$. 由 $f(0)=2$, 得 $f(2)=-f(0)+2=0$, 所以 $g(1)+g(2)=9+f(2)+8=17$, 所以 $g(1)+g(2)+\cdots+g(22)=5[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]+g(1)+g(2)=5 \times 36 + 17 = 197$, **D 正确**.

故选 ACD.

10. $2x^2-8x+9$ 【解析】设 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, $f(t)=2(t-1)^2+1=2t^2-4t+3$, 所以 $f(x)=2x^2-4x+3$, 所以 $f(x-1)=2(x-1)^2-4(x-1)+3=2x^2-4x+2-4x+4+3=2x^2-8x+9$.

11. $\frac{1}{4}$ 【解析】令 $x=y=1$, 得 $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

令 $x=y=-1$, 得 $f(1)=-2f(-1) \Rightarrow f(-1)=0$.

令 $x=y=2$, 得 $f(4)=4f(2)=4$.

令 $x=-\frac{1}{4}, y=4$, 得 $f(-1)=-\frac{1}{4}f(4)+4f\left(-\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}f(4)=\frac{1}{4}$.

所以 $f(-1)+f\left(-\frac{1}{4}\right)=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

12. $\sqrt{2}$ 【解析】 x, y 都是正数, 令 $\frac{1}{x}=2x$, 则

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \max\left\{\frac{1}{x}, 2x\right\}=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2x, & x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \text{其最}$$

小值是 $\sqrt{2}$.

$$\text{令 } \frac{2}{y}=y, \text{ 则 } y=\sqrt{2}, \max\left\{\frac{2}{y}, y\right\}=\begin{cases} \frac{2}{y}, & 0 < y \leq \sqrt{2}, \\ y, & y > \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{其最小值是 } \sqrt{2}.$$



因为 $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\} \geq \max \left\{ \frac{1}{x}, 2x \right\} \geq \sqrt{2}$, $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\} \geq \max \left\{ \frac{2}{y}, y \right\} \geq \sqrt{2}$,

所以 $\max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{2}{y}, 2x, y \right\}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$,

当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \sqrt{2}$ 时取得.

13. 【解】 (1) 由题意可得 $f(0) = \frac{a \times 0 + b}{4 - 0} = 0$,

所以 $b = 0$, 又 $f(-1) = \frac{-a}{4 - (-1)^2} = -\frac{1}{3}$, 所

以 $a = 1$, 所以 $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, 此时有

$f(-x) = \frac{-x}{4 - x^2} = -f(x)$, 即 $f(x)$ 的图象关于

原点对称, 故 $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$.

(2) $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增. 证明如下:

令 $-2 < x_1 < x_2 < 2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{4 - x_1^2} -$

$$\frac{x_2}{4 - x_2^2} = \frac{4x_1 - x_1x_2^2 - 4x_2 + x_2x_1^2}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)}$$

$$= \frac{4(x_1 - x_2) + x_1x_2(x_1 - x_2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)}$$

$$= \frac{(4 + x_1x_2)(x_1 - x_2)}{(4 - x_1^2)(4 - x_2^2)},$$

由 $-2 < x_1 < x_2 < 2$, 知 $4 + x_1x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0$,

$(4 - x_1^2)(4 - x_2^2) > 0$, 故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即

$f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增.

(3) 由题意可得 $f(x)$ 为奇函数, 则有

$$f(2x+1) > -f(x-2) = f(2-x),$$

又 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增, 则有

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-x, \\ 2x+1 < 2, \\ -2 < 2-x, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$

因此所求不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$.

14. 【解】 (1) 当 $x \leq 5$ 时, $y = 60x - 120$, 令 $60x - 120 > 0$, 得 $x > 2$, 又 $\because x \in \mathbf{N}^*$, $\therefore 3 \leq x \leq 5$, $x \in \mathbf{N}^*$;

当 $x > 5$ 时, $y = [60 - 2(x - 5)]x - 120 = -2x^2 + 70x - 120$, 令 $-2x^2 + 70x - 120 > 0$,

又 $\because x > 5, x \in \mathbf{N}^*$, $\therefore 6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*$.

综上所述, $y = f(x) =$

$$\begin{cases} 60x - 120 (3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*), \\ -2x^2 + 70x - 120 (6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*). \end{cases}$$



(2) 当 $3 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = 60x - 120$, 显然当 $x = 5$ 时, $f(x)$ 的值最大, 最大值为 $f(5) = 180$;

当 $6 \leq x \leq 33, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = -2x^2 + 70x - 120 = -2\left(x - \frac{35}{2}\right)^2 + \frac{985}{2}$,

故当 $x = 17$ 或 18 时, $f(x)$ 的值最大, 最大值为 $f(17) = f(18) = 492 > 180$.

综上所述, 当每辆电动观光车的日租金为 17 元或 18 元时, 才能使一日的净收入最多.


15. 【解】(1) 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(x)_{\min} = f(0) = 0, f(x)_{\max} = f(3) = 3$,

所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 在 $[0, 3]$ 上的值域

为 $[0, 3]$, 所以 $[0, 3]$ 为函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ 的“优美区间”.

(2) 因为 $g(x) = 2a - \frac{15}{x}$ 在 $[m, n] (m, n \in \mathbf{N})$ 上单调递增, 又 $[m, n] (m, n \in \mathbf{N})$ 为 $g(x)$ 的“优美区间”, 所以 $g(m) = m, g(n) = n$,

 **提示:** 函数 $f(x)$ 在闭区间上单调, 则 $f(x)$ 分别在两端点处取得最值

所以 m, n 是方程 $2a - \frac{15}{x} = x$ 的两个不等的正整数根, 即 m, n 是 $x^2 - 2ax + 15 = 0$ 的两个不等的正整数根,

$$\text{所以} \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4 \times 15 > 0, \\ m+n = 2a, \\ mn = 15, \\ m, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } m < n, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m = 1, \\ n = 15, \\ a = 8 \end{cases}$$

$$\text{或} \begin{cases} m = 3, \\ n = 5, \\ a = 4, \end{cases} \text{ 所以 } a \text{ 的最小值为 } 4.$$

(3) $h(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 假设 $[m, n] \subseteq (-\infty, 0)$ 或 $[m, n] \subseteq (0, +\infty)$,

则 $h(x) = \frac{(t^2+t)x-1}{t^2x} = \frac{t+1}{t} - \frac{1}{t^2x}$ 在 $[m, n]$ 上单调递增.

又 $[m, n]$ 是函数 $h(x)$ 的“优美区间”, 所以 $h(m) = m, h(n) = n$, 所以 m, n 是方程 $\frac{(t^2+t)x-1}{t^2x} = x$ 的两个不等的实数根,

即 m, n 是 $t^2x^2 - (t^2+t)x + 1 = 0$ 的两个同号且不等的实数根, 所以 $\Delta = (t^2+t)^2 -$



$$4t^2 > 0 \Rightarrow t > 1 \text{ 或 } t < -3.$$

$$\text{又 } \begin{cases} m+n = \frac{t+1}{t}, \\ mn = \frac{1}{t^2}, \end{cases} \text{ 所以 } n - m =$$

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn} = \sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 - \frac{4}{t^2}} =$$

$$\sqrt{-3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}, \text{ 当 } t = 3 \text{ 时, } n - m$$

$$\text{取得最大值 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$